

Глава 1

«Сэкономленный доллар – заработанный доллар»: Об инвестициях и сбережениях

1.3 Простые и сложные процентные ставки



Простые и сложные процентные ставки

ЧТО ТАКОЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ?

Если в настоящий момент времени у нас есть определенная сумма (PV), которую мы хотим куда-либо вложить на заданный срок (n) и получать заданный процент дохода (r), мы можем использовать несколько базовых схем исчисления конечного дохода (FV). Операция преобразования суммы из настоящего времени к будущему называется наращением (рис. 1).

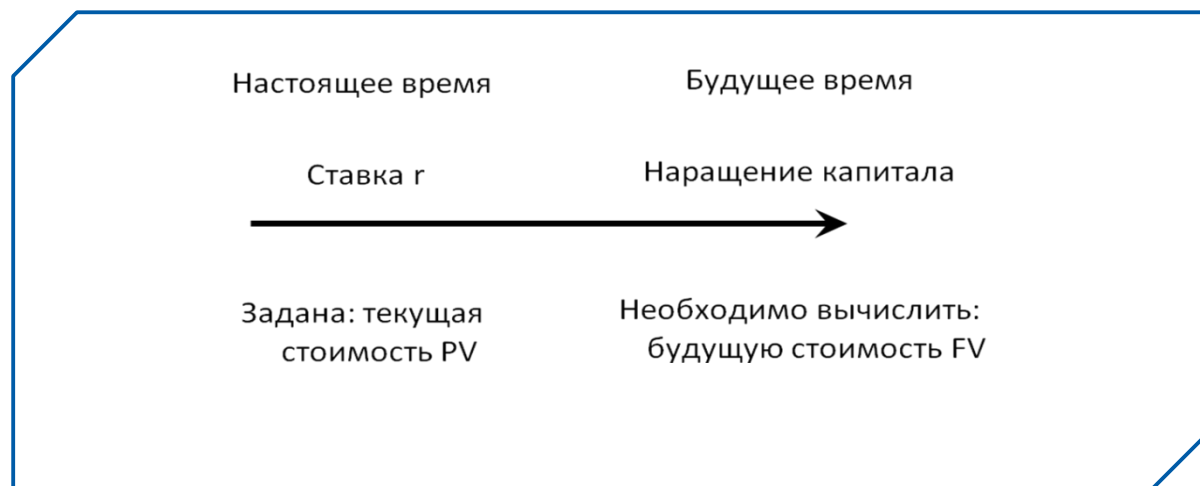


Рис. 1 – Операция наращения суммы

Рассмотрим основные схемы начисления процентов на вложенный капитал.

Простая ссудная ставка

Схема начисления простых процентов предполагает неизменность базовой основы, на которую производится начисление процентов. При наличии исходной суммы и простой годовой ставки ссудного процента вложенная сумма ежегодно увеличивается на величину $PV \times r$, а размер этой суммы через n лет составит:

$$FV(n) = PV + PV \cdot r + \dots + PV \cdot r = PV \cdot (1 + n \cdot r), \quad (1)$$

где PV – исходная сумма;

r – простая годовая ставка ссудного процента;

FV – будущая наращенная сумма;

n – срок финансовой операции в годах.

Простая ссудная ставка

Если период вложения меньше одного года, тогда в расчетах используют промежуточную процентную ставку, которая равна доле годовой ставки, пропорциональной доле временного интервала в году:

$$FV = PV \cdot \left(1 + t \cdot \frac{r}{T}\right), \quad (2)$$

где t – продолжительность финансовой операции,
в днях или в месяцах;
 T – количество дней в году (365, 366);
 r/T – промежуточная процентная ставка.

ПРИМЕР 1

Ссуда на 3 000 долл. предоставлена 16 января. Условия погашения: через 9 месяцев под 25% годовых (год не високосный). Рассчитайте сумму к погашению.

РЕШЕНИЕ

Для определения наращения капитала по простой ставке ссудного процента воспользуемся формулой (2):

1. Рассчитаем точное число дней финансовой операции: $t = 273$ дня.
2. Рассчитаем наращенную сумму:

$$FV = 3\,000 \times (1 + 0,25 \times 273/365) = 3\,560,96 \text{ долл.}$$

Для определения современной стоимости получаемой в будущем суммы используется

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДИСКОНТИРОВАНИЯ.

Операция дисконтирования производится по формуле:

$$PV = FV / (1 + n \cdot r). \quad (3)$$

Иногда на разных интервалах начисления применяются разные процентные ставки.

Если на последовательных интервалах начисления, продолжительность которых составляет n_1, n_2, \dots , применяются соответствующие им ставки процентов r_1, r_2, \dots , то наращенная сумма составит:

- **в конце первого интервала:** $FV_1 = r_1 \cdot n_1$;
- **в конце второго интервала:** $FV_2 = FV_1 \cdot r_2 \cdot n_2 = PV(1 + n_1 \cdot r_1 + n_2 \cdot r_2)$.

При ***N*** интервалах начисления наращенная сумма составит:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n n_i \cdot r_i \right). \quad (4)$$

ПРИМЕР 2

Кредит в сумме \$20 000 выдан на 2,5 года. Ставка процентов за первый год – 30%, а каждое последующее полугодие она уменьшается на 2%. Определить наращенную сумму.

РЕШЕНИЕ

1. Определим процентные ставки в каждый период времени:

$$n_1 = 1, \quad r_1 = 30\%.$$

$$n_2 = 0,5, \quad r_2 = 28\%.$$

$$n_3 = 0,5, \quad r_3 = 26\%.$$

$$n_4 = 0,5, \quad r_4 = 24\%.$$

2. Рассчитаем наращенную сумму по формуле (4):

$$FV = 20\,000 \times (1 + 1 \times 0,3 + 0,5 \times 0,28 + 0,5 \times 0,26 + 0,5 \times 0,24) = \$33\,800.$$

Простая учетная ставка

Существует иной способ начисления процентов с использованием учетной ставки.

При данном способе начисления процентов сумма получаемого дохода рассчитывается исходя из суммы, получаемой по прошествии интервала начисления (то есть из наращенной суммы). Эта сумма и считается величиной получаемого кредита (ссуды).

Так как проценты в данном случае начисляются в начале каждого интервала начисления, заемщик получает сумму кредита за вычетом процентных денег. Такая операция называется **дисконтированием по учетной ставке**, или банковским учетом.

Дисконт – это доход, полученный по учетной ставке, то есть разница между размером предоставляемого кредита и непосредственно выдаваемой суммой.

Простая учетная ставка

Введем обозначения для нижеприведенных формул:

d – простая годовая учетная ставка;
 PV – сумма, получаемая заемщиком;
 FV – сумма, подлежащая возврату.

Для расчета показателей, используемых при предоставлении кредита, используются следующие формулы:

- для определения суммы, получаемой заемщиком за весь период кредитования: $PV = FV \cdot (1 - n \cdot d);$ (5)

- для определения наращенной суммы: $FV = \frac{PV}{(1 - n \cdot d)};$ (6)

- для определения наращенной суммы при периоде начисления, не равном году: $FV = \frac{PV}{(1 - d \cdot t/T)};$ (7)

- для определения наращенной суммы при использовании разных ставок на разных интервалах начисления: $FV = PV / (1 - \sum_{i=1}^n n_i \cdot d_i).$ (8)

ПРИМЕР 3

За вексель, учтенный за 5 лет до срока погашения по учетной ставке 14% годовых, заплачено 4 000 руб. Определить номинальную стоимость векселя.

РЕШЕНИЕ

По формуле (6) получаем: $FV = 4\,000 / (1 - 0,14 \times 5) = 13\,333$ руб.

ПРИМЕР 4

В банк предъявлен вексель на сумму 50 тыс. руб. за полтора года до его погашения. Банк согласен учесть вексель по переменной простой учетной ставке, установленной следующим образом: первые полгода – 30% годовых, следующие полгода – 36% годовых, затем каждый квартал ставка повышается на 2%. Определите дисконт банка и сумму, которую получит векселедержатель.

РЕШЕНИЕ

1. Определим учетные ставки для соответствующего срока финансовой операции:

$$n_1 = 0,5, \quad d_1 = 30\%.$$

$$n_2 = 0,5, \quad d_2 = 36\%.$$

$$n_3 = 0,25, \quad d_3 = 38\%.$$

$$n_4 = 0,25, \quad d_4 = 40\%.$$

2. Рассчитаем сумму, полученную владельцем векселя по формуле (5):

$$PV = 50\,000 \times (1 - (0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,36 + 0,25 \times 0,38 + 0,25 \times 0,4)) = 23\,750 \text{ руб.}$$

3. Дисконт равен: $D = 50\,000 - 23\,750 = 26\,250$ руб.

Сложная ссудная ставка

В схеме сложных процентов очередной годовой доход исчисляется не с исходной, а с общей суммы, включающей начисленные проценты. Происходит капитализация процентов, т. е. база, с которой они начисляются, все время возрастает.

Размер возвращаемой суммы рассчитывается по формулам:

- **через 1 год –** $FV_1 = PV + PV \cdot r = PV \cdot (1 + r);$
- **через 2 года –** $FV_2 = FV_1 + FV_1 \cdot r = FV_1 \cdot (1 + r) = PV(1 + r)^2;$
-
• **через n лет –** $FV_n = PV \cdot (1 + r)^n.$ (9)

Определить приведенную стоимость для заданных процентной ставки и количества лет можно по формуле:

$$PV = FV_n / (1 + r)^n. \quad (10)$$

Сложная ссудная ставка

ПРИМЕР 5

Рассчитать наращенную сумму при условии помещения в банк 2000 руб. и начисления простых и сложных процентов с годовой ставкой 20 % (начисление процентов – один раз в год) и следующими периодами наращения: 90 дней, 180 дней, 1 год, 5 лет, 10 лет. Количество дней в году принять равным – 360.

РЕШЕНИЕ

Результаты расчета представлены в таблице:

Схема начисления	Наращенная сумма по периодам наращения, руб.				
	90 дней, $n = 1/4$	180 дней, $n = 1/2$	1 год, $n = 1$	5 лет, $n = 5$	10 лет, $n = 10$
Простые проценты	2100	2200	2400	4000	6000
Сложные проценты	2093	2191	2400	4977	12384

Таким образом, если денежные средства размещены в банке на срок менее 1 года, то выгоднее использовать схему простых процентов; при размещении средств на срок более 1 года – выгоднее схема сложных процентов.

Сложная ссудная ставка

Часто на практике оговаривается величина годового процента и количество периодов начисления процентов. Тогда расчет наращенной суммы ведется по формуле:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m}, \quad (11)$$

где r – объявленная годовая сложная ссудная ставка;
 m – количество начислений процентов внутри одного года;
 n – количество лет.

Сложная ссудная ставка

ПРИМЕР 6

В банк вложены деньги в сумме 5 000 руб. на 2 года с полугодовым начислением процентов по ставке 20% годовых. Определить наращенную сумму.

РЕШЕНИЕ

- При полугодовом начислении процентов наращение происходит 2 раза по ставке 10%, а наращенная сумма составит:
 $FV = 5\,000 \times 1,4641 = 7\,320,5$ руб.
- Если проценты начисляются ежеквартально, то наращение происходит 4 раза в год по ставке 5%, а наращенная сумма составит:
 $F = 5\,000 \times (1 + 0,2/4)^{2 \times 4} = 7\,387,3$ руб.

Таким образом, чем чаще идет начисление процентов внутри года по схеме сложных процентов, тем больше накопленная сумма.

Заметим, что при начислениях по схеме простых процентов частота начислений не играет роли, так как наращение всегда происходит от исходной суммы.

Сложная ссудная ставка

Часто на практике ставка может быть плавающей в каждом периоде. Тогда расчет наращенной суммы ведется по формуле:

$$FV = PV \times \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{r_i}{m}\right)^{n_i \times m} \quad (12)$$

где r_i – объявленная годовая сложная ссудная ставка, которая изменяется в периоде;
 m – количество начислений процентов внутри одного года;
 n_i – соответствующий временной интервал, в котором действует процентная ставка r_i .

Пример:

Вы вложили 10000 рублей на 3 года в банк. В первые полгода действовала ставка по вкладу 10% годовых. Затем следующие полгода ставка снизилась до 9%. И в оставшиеся 2 года действовала ставка 8% годовых. При этом проценты начислялись ежемесячно (ежемесячная капитализация процентов). Какую сумму вы накопили к концу третьего года?

Решение:

$$n_1 = 0,5; n_2 = 0,5; n_3 = 2; \quad r_1 = 10\%; r_2 = 9\%; r_3 = 8\%; \quad PV = 10000; \quad m = 12.$$

Используя формулу (12) рассчитаем FV:

$$FV = 10000 \times \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12 \times 0,5} \times \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{12 \times 0,5} \times \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12 \times 2} = 12893$$

Таким образом через три года на счете вы накопите 12893 рубля.

Сложная учетная ставка

При использовании сложной годовой учетной ставки для определения параметров финансовой сделки используем следующие формулы:

для определения суммы, получаемой заемщиком:

- в конце первого интервала: $PV_1 = FV - d \cdot FV = FV \cdot (1 - d)$;

- в конце второго интервала:

$$PV_2 = PV_1 - PV_1 \cdot d = FV \cdot (1 - d) - FV \cdot (1 - d) \cdot d = FV \cdot (1 - d)^2;$$

- через n лет: $PV_n = FV \cdot (1 - d)^n$; (13)

для определения наращенной суммы:

$$FV = \frac{PV}{(1 - d)^n}. \quad (14)$$

Сложная учетная ставка

Наращение сумм по сложной учетной ставке и сложной ссудной ставке происходит с разной скоростью (рис. 2): скорость выше при применении сложной учетной ставки.

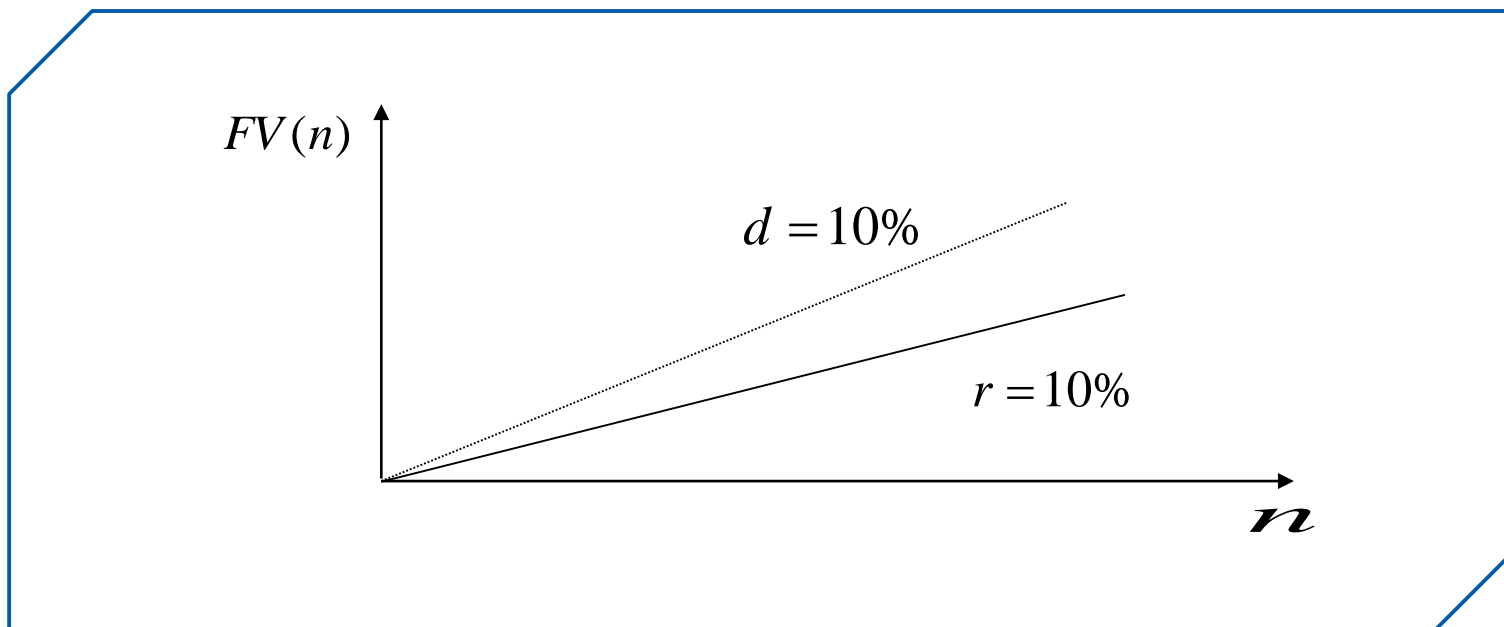


Рис. 2 – Наращенная сумма при начислении сложных процентов

Сложная учетная ставка

ПРИМЕР 7

Первоначальная сумма долга равняется 10 млн руб. Определить величину наращенной суммы при использовании сложной ссудной и сложной учетной ставки начисления процентов, если ставка равна 20% годовых, срок начисления процентов – 3 года.

РЕШЕНИЕ

Используя формулы (9) и (14), получим:

$$FV_1 = 10 \cdot (1 + 0,2)^3 = 17,28 \text{ млн руб.};$$

$$FV_2 = 10 / (1 - 0,2)^3 = 19,53 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, разница составляет 2,25 млн руб.

Сложная учетная ставка

При начислении процентов m раз за период наращенная сумма определяется по формуле:

$$FV = \frac{PV}{\left(1 - \frac{d}{m}\right)^{m \cdot n}}. \quad (15)$$

Если ставка сложных процентов будет разной на разных интервалах начисления, то пусть n_1, n_2, \dots – продолжительность интервалов начисления в годах, d_1, d_2, \dots – годовые учетные ставки процентов, соответствующие этим интервалам, тогда наращенная сумма определяется по формуле:

$$FV = PV / \prod_{i=1}^k (1 - d_i)^{n_i}. \quad (16)$$

Спасибо за внимание!