

Глава 1

Логика вычисления сложных процентов и аннуитета



Операция наращенния суммы

Настоящее время

Будущее время

Ставка r

Наращение капитала



Задана: текущая
стоимость PV

Необходимо вычислить:
будущую стоимость FV

Операция дисконтирования суммы

Настоящее время

**Дисконтирование
капитала**

Будущее время

Ставка r



**Необходимо вычислить:
текущую, или
дисконтированную
стоимость (PV)**

**Задана: Будущая
стоимость (FV)**



ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ:

$$FV = PV + PV \cdot r + \dots + PV \cdot r = PV \cdot (1 + r \cdot n) \quad (1)$$

PV - исходная сумма,

r - простая годовая ставка ссудного процента,

FV - будущая наращенная сумма,

n – срок финансовой операции в годах.

ПРИМЕР:

У вас есть 100000 руб., банк предлагает вклад под 10% годовых сроком на 3 года. Какова сумма накоплений через 3 года, если банк начисляет простые проценты.

РЕШЕНИЕ:

$$PV=100000, r=0,1, n=3.$$

$$FV = 100000 * (1 + 0,1 * 3) = 130000 \text{ руб.}$$

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ:

- через 1 год — $FV_1 = PV + PV \cdot r = PV \cdot (1 + r)$;
- через 2 года — $FV_2 = FV_1 + FV_1 \cdot r = FV_1 \cdot (1 + r) = PV(1 + r)^2$;
- через n лет — $FV_n = PV \cdot (1 + r)^n$.

PV - исходная сумма,

r - сложная годовая ставка ссудного процента,

FV - будущая наращенная сумма,

n – срок финансовой операции в годах.

СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ:

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n \quad (2)$$

PV - исходная сумма,

r - сложная годовая ставка ссудного процента,

FV - будущая наращенная сумма,

n – срок финансовой операции в годах.

ПРИМЕР:

У вас есть 100000 руб., банк предлагает вклад под 10% годовых сроком на 3 года. Какова сумма накоплений через 3 года, если банк начисляет сложные проценты.

РЕШЕНИЕ:

$$PV=100000, r=0,1, n=3.$$

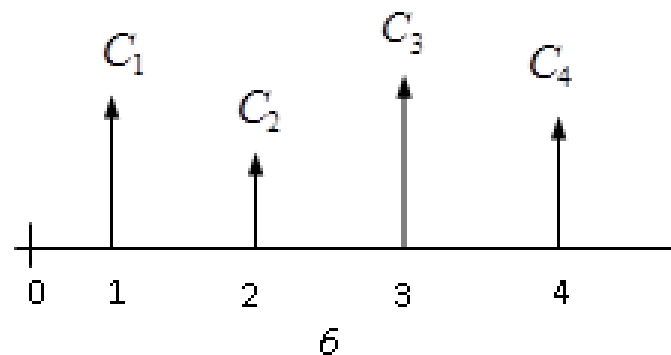
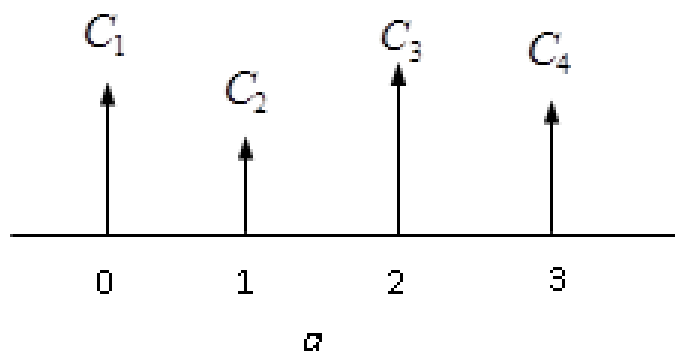
$$FV = 100000 * (1 + 0,1)^3 = 133100 \text{ руб.}$$

Сравнение простых и сложных ставок

| Простые проценты | Сложные проценты |
|--|--|
| <p data-bbox="150 308 952 515">Проценты начисляются на первоначально вложенный капитал.</p> <p data-bbox="150 615 952 901">Проценты выплачиваются на отдельный счет, не присоединяются к основной сумме вклада</p> | <p data-bbox="991 308 1792 665">Процента начисляются на совокупный (с учетом начисленных процентов в прошлом) наращенный капитал.</p> <p data-bbox="991 765 1792 1200">Проценты выплачиваются на тот же счет, что и основная сумма вклада, это называется капитализацией процентов</p> |

Денежный поток

ДЕНЕЖНЫЙ ПОТОК – это распределенная во времени последовательность выплат и поступлений денежных средств, генерируемая некоторым активом или инвестиционным проектом.



Денежные потоки пренумерандо (а) и постнумерандо (б)

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА – это суммарная оценка наращенного денежного потока с позиции его **будущей стоимости**.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА - суммарная оценка дисконтированного денежного потока, т.е. приведение сумм из будущего времени к настоящему периоду (позволяет оценить **текущую стоимость** будущего денежного потока).

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

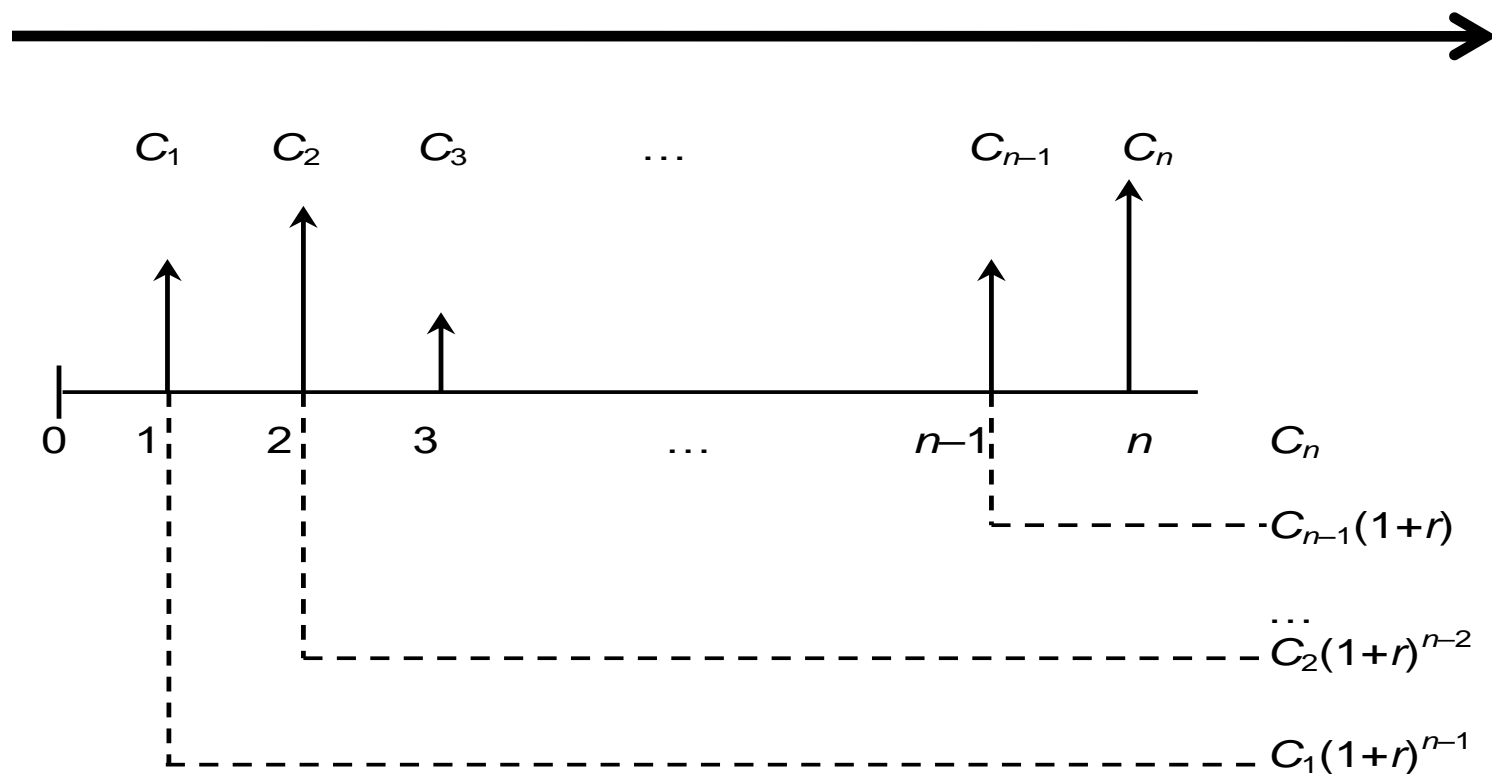
r – годовая процентная ставка (начисляется один раз за год),

n – базовый период поступления (или оттока) капитала, равен одному году,

m – количество начислений процентов внутри базового периода (например, если проценты начисляются ежеквартально, то $m=4$).

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА оценки потока постнумерандо

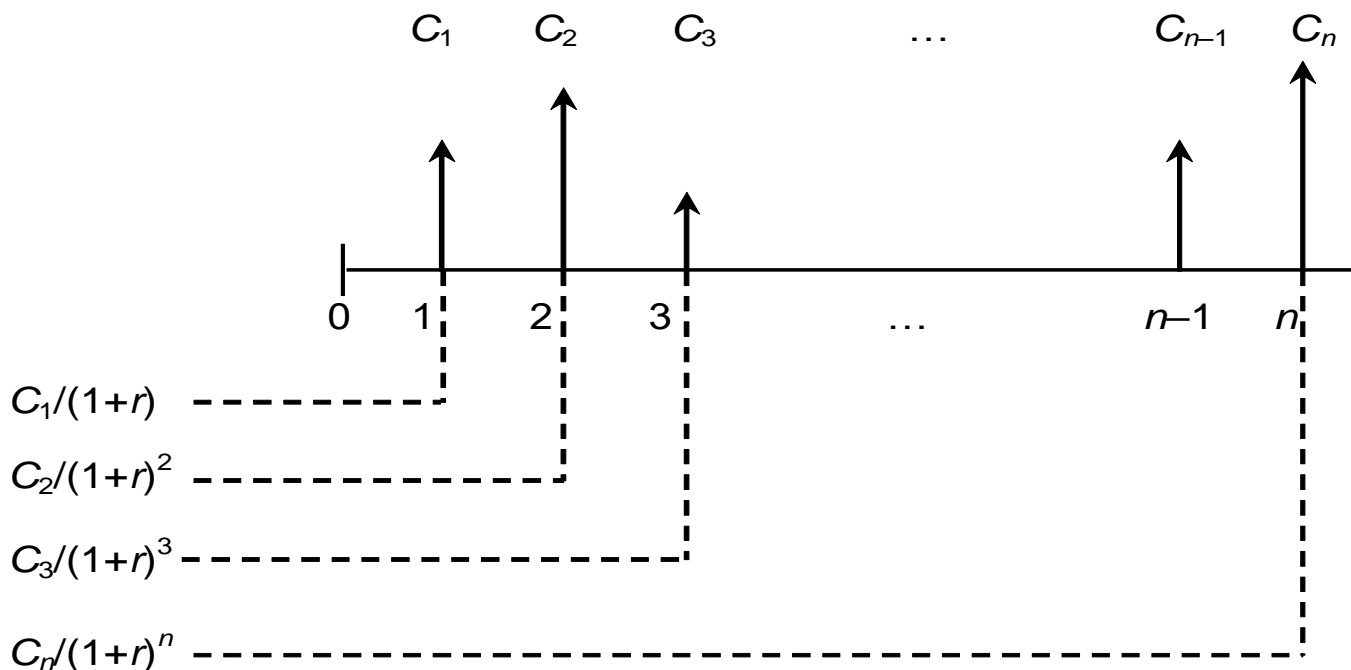
Из настоящего времени к будущему (наращенная стоимость)



Логика решения прямой задачи для потока постнумерандо

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА оценки потока постнумерандо

Из будущего времени к настоящему (приведенная стоимость)

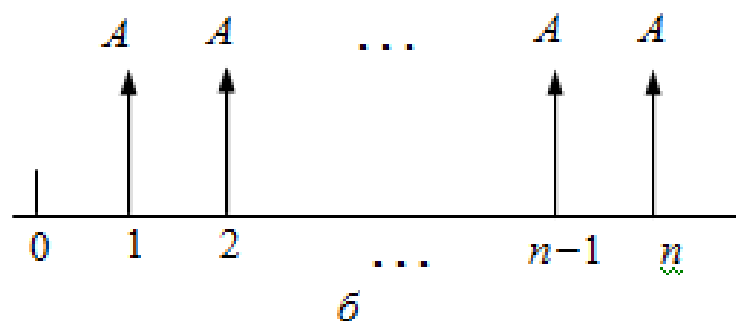
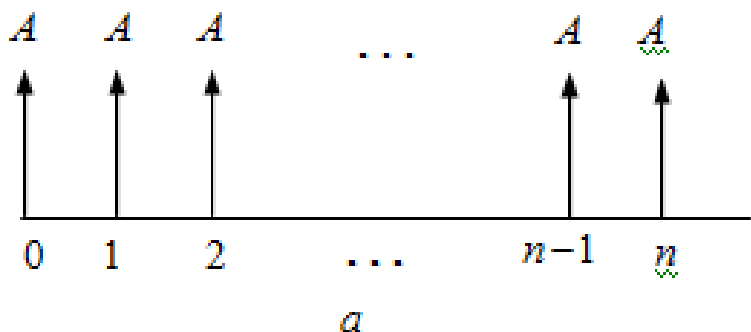


Логика решения обратной задачи для потока постнумерандо

Постоянный аннуитет

Денежный поток с равными по величине временными интервалами поступления или оттоков капитала называется финансовой рентой, или **АННУИТЕТОМ**.

АННУИТЕТ называется **ПОСТОЯННЫМ**, если все денежные поступления равны между собой ($C_1 = C_2 = \dots = C_n = A$).



Виды постоянных аннуитетов: пренумерандо (а) и постнумерандо (б)

Оценка будущей стоимости постоянного аннуитета постнумерандо

$$FV_{pst} = A \sum_{k=1}^n (1+r)^{n-k} = A \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \quad (3)$$

A – аннуитетный платеж,

n – продолжительность аннуитета, в годах,

r – сложная ставка процентов, начисляется один раз в конце каждого базового периода.

Оценка приведенной стоимости постоянного аннуитета постнумерандо

$$PV_{pst} = A \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(1+r)^k} \right) = A \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r}. \quad (4)$$

A – аннуитетный платеж,

n – продолжительность аннуитета, в годах,

r – сложная ставка процентов, начисляется один раз в конце каждого базового периода.

Приведенная стоимость аннуитета нужна для:

1. Чтобы оценить стоимость денег, которые возможно получить в будущем с позиции их текущей стоимости (т.е. стоимости в настоящий момент времени),
2. Чтобы сравнить дисконтированную стоимость будущих доходов с суммой первоначальных инвестиций. Например, стоит ли покупать акцию за 3000 руб., которая в течение 10 лет будет приносить доход по 500 руб.?
3. Чтобы определить, какую сумму необходимо положить на счет сейчас, чтобы в течении заданного срока в будущем обеспечить заданную сумму платежа.

Постоянный аннуитет

Если в течение базового периода (равен 1 году) денежные поступления (или оттоки) происходят p раз и проценты начисляются m раз за период, оценка аннуитета постнумерандо производится по формулам:

$$FV_{pst} = A \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/p} - 1}, \quad (5)$$

$$PV_{pst} = A \frac{1 - \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{-n \cdot m}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m/p} - 1}. \quad (6)$$

Постоянный аннуитет

ПРИМЕР

Компания гарантирует выплату дивидендов по акциям в размере 10 тыс. руб. в конце каждого квартала. Определить возможные суммы, которые можно накопить за 5 лет, если дивиденды вкладывать в банк под сложную процентную ставку 12% годовых с начислением процентов ежемесячно.

РЕШЕНИЕ:

$$A = 10000; n = 5; r = 12\%; m = 12; p = 4:$$

$$FV = 10000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12/4} - 1} = 269528 \text{руб.}$$

За 5 лет можно накопить 269 528 руб.

ПРИМЕР

Какую сумму необходимо поместить в банк под сложную процентную ставку 24% годовых, чтобы в течение 10 лет иметь возможность в конце каждого года снимать со счета 100 тыс. руб., исчерпав счет полностью, если банком начисляются сложные проценты ежеквартально?

РЕШЕНИЕ

Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить приведенную стоимость аннуитета постнумерандо.

$$A = 100000; r = 24\%; n = 10; p = 1; m = 4:$$

$$PV_{pst} = 100000 \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{0,24}{4}\right)^{-10 \cdot 4}}{\left(1 + \frac{0,24}{4}\right)^{4/1} - 1} = 343946 \text{ руб.}$$

В банк на счет необходимо положить 343 946 руб.

Аннуитет называется **переменным**, если его члены различны по величине.

1. Если платежи **различны по величине**, то для оценки переменного аннуитета используют общие формулы оценки денежного потока.
2. Если члены аннуитета изменяются в соответствии с законом **арифметической прогрессии**, то используем формулы (7) и (8).
3. Если члены аннуитета изменяются в соответствии с законом **геометрической прогрессии**, то используем формулы (9) и (10).

Переменный аннуитет

Если платежи аннуитета образуют арифметическую прогрессию, т. е. изменяются на постоянную абсолютную (т.е. выраженную в валюте) величину Z и представляют собой последовательность:

$$A, A+z, A+2z, A+3z \dots A+(n-3)*z, A+(n-2)*z, A+(n-1)*z$$

Z – может быть как **положительной** величиной (тогда платежи аннуитета возрастают), так и **отрицательной** величиной (тогда платежи аннуитета убывают).

Переменный аннуитет

Формула для вычисления будущей стоимости аннуитета постнумерандо:

$$FV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right) \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} - \frac{zn}{r}. \quad (7)$$

Формула для вычисления приведенной стоимости аннуитета постнумерандо:

$$PV_{pst} = \left(A + \frac{z}{r}\right) \cdot \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} - \frac{zn}{r(1+r)^n}. \quad (8)$$

Переменный аннуитет

ПРИМЕР

Согласно условиям финансового соглашения на счет в банке в течение 8 лет в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 4 тыс. долл., а каждая следующая будет увеличиваться на 0,5 тыс. долл. Оцените этот аннуитет, если банк применяет процентную ставку 10% годовых и сложные проценты начисляются один раз в конце года. Как изменятся оценки аннуитета, если денежные суммы будут уменьшаться на 0,5 тыс. долл.?

РЕШЕНИЕ: **ИСПОЛЬЗУЕМ ФОРМУЛЫ (7) И (8)**

1) $A = 4000; n = 8; r = 0,1; z = +500.$

Сначала найдем будущую стоимость аннуитета:

$$FV_{pst} = \left(4\ 000 + \frac{500}{0,1}\right) \cdot \frac{(1 + 0,1)^8 - 1}{0,1} - \frac{500 \cdot 8}{0,1} = 62\ 923.$$

Переменный аннуитет

РЕШЕНИЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1) $A = 4000; n = 8; r = 0,1; z = +500.$

Далее найдем приведенную стоимость аннуитета:

$$PV_{pst} = \left(4\ 000 + \frac{500}{0,1}\right) \cdot \frac{1 - (1 + 0,1)^{-8}}{0,1} - \frac{500 \cdot 8}{0,1 \cdot (1 + 0,1)^8} = 29\ 354.$$

Переменный аннуитет

РЕШЕНИЕ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

2) $A = 4000$; $n = 8$; $r = 0,1$; $z = -500$.

Найдем будущую стоимость аннуитета:

$$FV_{pst} = \left(4\ 000 - \frac{500}{0,1}\right) \cdot \frac{(1 + 0,1)^8 - 1}{0,1} + \frac{500 \cdot 8}{0,1} = 28\ 654.$$

Найдем приведенную стоимость аннуитета:

$$PV_{pst} = \left(4\ 000 - \frac{500}{0,1}\right) \cdot \frac{1 - (1 + 0,1)^{-8}}{0,1} + \frac{500 \cdot 8}{0,1 \cdot (1 + 0,1)^8} = 13\ 325.$$

Переменный аннуитет

Платежи аннуитета образуют геометрическую прогрессию с первым членом A и знаменателем x . То есть, все платежи изменяются на одну и ту же **относительную величину x** и составляют ряд:

$$A, A \cdot x, A \cdot x^2, A \cdot x^3, \dots, A \cdot x^{n-2}, A \cdot x^{n-1}.$$

X измеряется либо **в процентах**, или **в разгах**. Может быть, как положительной, так и отрицательной величиной. Например,

Задано, что платеж **увеличивается на 10 %**,
то $X = (1+0,1) = 1,1$,

Задано, что платеж **уменьшается на 10%**,
то $X = (1-0,1) = 0,9$.

Переменный аннуитет

Формулы для оценки переменного аннуитета постнумерандо, платежи которого образуют геометрическую прогрессию с первым членом A и знаменателем x :

$$FV_{pst} = A \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}; \quad (9)$$

$$PV_{pst} = \frac{A}{(1+r)^n} \frac{x^n - (1+r)^n}{x - (1+r)}. \quad (10)$$

Пример:

Вы решили делать накопления. Первый платеж составил 100000 руб., каждый последующий планируете увеличивать на 5%. Периодичность пополнения счета вклада – ежегодно. Процентная ставка 10% годовых. Вычислите, сколько вы накопите за 5 лет?

Решение:

$$A = 100000, x = 1,05, r = 0,1$$

Подставим значения в (8):

$$FV_{pst} = 100000 \cdot \frac{1,05^5 - (1 + 0,1)^5}{1,05 - (1 + 0,1)} = 100000 \cdot \frac{-0,3342}{-0,05} = 668400 \text{руб.}$$

Спасибо за внимание!

Ваши вопросы?