Модуль 5.5. Примеры формальных аксиоматических теорий

Аксиоматизация геометрии

«Начала» Евклида не были достаточно последовательными с точки зрения воплощения даже неформального аксиоматического метода. Трактат начинается с определений таких геометрических понятий, как «точка», «прямая», «плоскость» и др. Но это все не определения, а пояснения понятий. При современном изложении геометрии данные понятия не определяются. Евклид дает 19 аксиом [1], которым удовлетворяют точки, прямые и плоскости, но этих аксиом недостаточно. Он иногда опирается на утверждения, не входящие в список аксиом. Многие рассуждения Евклида апеллировали к зрительной интуиции. Но тем не менее следует отдать должное древнегреческим математикам, и в частности Евклиду, что впервые более двух тысяч лет назад была поставлена задача логического обоснования математики и в большей части удовлетворительно решена.

Изложение геометрии, основанное на «Началах» Евклида, постепенно улучшалось усилиями многих математиков. Были добавлены отсутствующие аксиомы, и некоторые аксиомы стали теоремами. Очень много усилий было потрачено математиками на освобождение геометрии Евклида от его ***аксиомы о параллельных прямых***. Часть аксиом Евклид называл ***постулатами*** — они были связаны с какими-то геометрическими построениями и аксиома о параллельных более известна как пятый постулат Евклида. В современном и более простом, но математически равносильном, виде аксиома о параллельности гласит:

«В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной».

За два тысячелетия было предложено много доказательств этой аксиомы, но в каждом из них рано или поздно обнаруживался порочный круг: оказывалось, что среди явных или неявных посылок содержится утверждение, которое не удаётся доказать без использования того же пятого постулата.

Глубокое исследование аксиомы о параллельных, основанное на совершенно оригинальном принципе, провёл в 1733 году итальянский монах-иезуит, преподаватель математики Джироламо Саккери. Он опубликовал труд под названием «Евклид, очищенный от всех пятен, или же геометрическая попытка установить самые первые начала всей геометрии». Идея Саккери состояла в том, чтобы заменить пятый постулат противоположным утверждением («через точку, взятую вне данной прямой, можно провести более одной прямой, параллельной данной»), вывести из новой системы аксиом как можно больше следствий, тем самым построив «ложную геометрию», и найти в этой геометрии противоречия или заведомо неприемлемые положения. Тогда справедливость аксиомы о параллельных будет доказана от противного [2]. Но ему не удалось получить противоречие.

Рис. 1 – Николай Лобачевский

В первой половине XIX века по пути, проложенному Саккери, пошли Карл Гаусс, венгерский математик Янош Бойяи и российский математик Николай Лобачевский (рис. 1). Но цель у них была уже иная — не разоблачить неевклидову геометрию как невозможную, а, наоборот, построить альтернативную геометрию и выяснить её возможную роль в реальном мире. На тот момент это была совершенно еретическая идея; никто из учёных ранее не сомневался, что физическое пространство евклидово. Гаусс не решился опубликовать работу на эту тему, но его черновые заметки и несколько писем подтверждают глубокое понимание неевклидовой геометрии.

Лобачевский и Бойяи проявили большую смелость, чем Гаусс, и почти одновременно (Лобачевский — в докладе 1826 года и публикации 1829 года; Бойяи — в письме 1831 года и публикации 1832 года), независимо друг от друга, опубликовали изложение того, что сейчас называется геометрией Лобачевского. Лобачевский продвинулся в исследовании новой геометрии дальше всех, и она в настоящий момент носит его имя.

Приведем примеры теорем, которые имеют место в геометрии Лобачевского. Прежде всего заметим, что все теоремы, доказываемые без использования аксиомы параллельности, сохраняются и в геометрии Лобачевского. Например, вертикальные углы конгруэнтны (равны), углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны; из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр. Теоремы же евклидовой геометрии, при доказательстве которой применяется аксиома параллельности, в геометрии Лобачевского видоизменяются. Например, теорема о сумме углов треугольника: *сумма величин углов любого треугольника меньше* π.

Разность $\delta = \pi - (\angle A + \angle B + \angle C)$ называется дефектом треугольника ABC. Лобачевский доказал, что в его геометрии площадь треугольника пропорциональна дефекту, $S = k \cdot \delta$, где коэффициент k зависит от выбора единицы измерения площадей.

Интересно, что в геометрии Лобачевского существуют три прямые, попарно параллельные друг другу в различных направлениях (рис. 2).

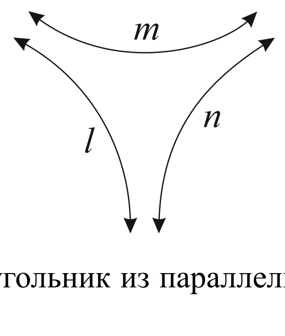


Рис. 2 – Треугольник из параллельных прямых

У треугольника, образованного этими прямыми, вершины как бы находятся в бесконечности, причем мера каждого угла равна 0. Отсюда следует, что дефект этого «треугольника» равен π и, следовательно, этот бесконечный «треугольник» имеет конечную площадь.

Главная заслуга Лобачевского в том, что он поверил в новую геометрию и имел мужество отстаивать своё убеждение.

При этом Лобачевский действовал «синтаксически», манипулируя с аксиомами чисто формально, без какого бы то ни было визуального сопровождения, ибо никто в те времена не мог себе представить, как неевклидову геометрию можно реализовать.

Доказать непротиворечивость новой геометрии ни Лобачевский, ни Бойяи не сумели — тогда математика ещё не располагала необходимыми для этого средствами. Только спустя 40 лет появились модель Феликса Клейна и модель Пуанкаре, реализующие аксиоматику геометрии Лобачевского на базе евклидовой геометрии. В модели Клейна (рис. 3) плоскость — внутренность круга k, прямые — хорды. Через точку P проходит целый пучок хорд, не пересекающих прямую a.

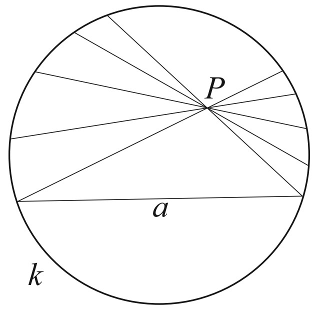


Рис. 3 – Модель Клейна

Таким образом, геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива евклидова геометрия.

Первая последовательная и полная аксиоматическая теория для евклидовой геометрии была создана Давидом Гильбертом в самом конце XIX века, после того как Мориц Паш и Гильберт обнаружили все утверждения, которые Евклид не сформулировал в виде аксиом, но использовал при доказательствах [3].

Дадим представление об аксиоматике Гильберта в неформальном виде. Полное описание аксиом и понятий и примеры доказательств геометрических теорем смотрите в [1]. Восемь понятий считаются неопределенными: «точка», «прямая», «плоскость», отношение «точка лежит на прямой», отношение «точка лежит на плоскости», отношение «точка B лежит между точками A и C», отношение равенства для углов, отношение равенства для отрезков. На основе исходных неопределяемых понятий определяются новые понятия «пересекаться» (о прямых и плоскостях), «лежать на», «принадлежать», «проходить через» (о прямой и плоскости) и т. п.

Аксиомы делятся на пять групп.

Аксиомы связи (8 аксиом)

Аксиомы связи, или аксиомы принадлежности, говорят о том, в каких отношениях точки, прямые и плоскости могут находиться друг с другом. При интерпретации этих аксиом на естественном языке мы обычно используем выражения «точка лежит на плоскости», «прямая проходит через две данные точки» и т. п.

Пример аксиомы из этой группы:

Если две различные точки лежат на некоторой прямой и на некоторой плоскости, то всякая точка, лежащая на этой прямой, лежит и на этой плоскости.

Аксиомы порядка (6 аксиом)

Аксиомы порядка описывают расположение точек прямой на основе отношения «между».

В качестве примера аксиомы из этой группы приведем аксиому Паша (Мориц Паш открыл эту аксиому в 1882 г.). Эта аксиома в неформальном изложении такова:

Прямая, расположенная в плоскости треугольника и пересекающая одну из сторон этого треугольника, обязательно пересекает и какую-то другую сторону.

Аксиомы конгруэнтности (6 аксиом)

В этих аксиомах определяется равенство отрезков, углов, треугольников.

Но предварительно эти новые понятия должны быть определены через неопределяемые и уже введенные понятия.

Пример аксиомы:

Всякий угол равен самому себе.

Аксиомы непрерывности (2 аксиомы)

Приведем вольные формулировки этих двух аксиом.

Аксиома Архимеда утверждает, что, шагая по прямой равномерными шагами, можно рано или поздно перешагнуть через любую точку на этой прямой.

Аксиома Кантора утверждает, что для любой последовательности вложенных друг в друга отрезков найдется точка, лежащая внутри каждого из этих отрезков.

Последняя группа состоит из одной аксиомы.

Аксиома о параллельных

Через всякую точку, не лежащую на какой-либо прямой p, проходит не более одной прямой, параллельной прямой p.

Утверждение, что через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной, есть теорема, вытекающая из остальных аксиом геометрии, так что нет нужды провозглашать ее аксиомой.

Аксиоматику Гильберта можно полностью описать на языке первого порядка, и аксиомы Гильберта образуют независимую систему аксиом. Что касается непротиворечивости системы аксиом, то Гильберт построил ее модель, опирающуюся на теорию действительных чисел. Что касается теории действительных чисел, то ее непротиворечивость (как показывают модели, построенные Кантором и Дедекиндом) сводится к непротиворечивости рациональных чисел, что, в свою очередь, сводится к непротиворечивости теории элементарной арифметики ***EA*** (параграф 5.5, тема «Аксиоматика Пеано»).

Правомочен вопрос: какая из аксиом о параллельности, Евклида или Лобачевского, точнее описывает те представления о структуре реального физического пространства, которые отражаются в геометрических образах? Строгий ответ на этот вопрос: неизвестно. Однако можно с уверенностью утверждать, что в доступных нашему наблюдению областях пространства евклидова геометрия соблюдается с высокой степенью точности. Так что, когда мы говорим о неизвестности, мы имеем в виду очень большие области пространства.

Аксиоматика Пеано

Теория элементарной арифметики $\boldsymbol{EA}$ явилась началом использования в математике формальных аксиоматических теорий первого порядка. Язык элементарной арифметики — язык первого порядка — имеет сигнатуру, состоящую из одной константы $\mathbf{0}$, одноместного функционального символа S и двух двуместных функциональных символов $+$ и $\times$. Стандартная интерпретация этого языка имеет своим носителем множество натуральных чисел $\mathbf{N}$, константу $\mathbf{0}$, функциональные символы интерпретируются как сложение и умножение, а $S(x)$ обозначает $x + 1$.

Собственные аксиомы $\boldsymbol{EA}$ суть формулы следующих видов.

$\boldsymbol{P}_1$. $\Big(P(\mathbf{0})\ \&\ \forall x\big(P(x) \supset P\big(S(x)\big)\big)\Big) \supset \forall z P(z)$

(принцип математической индукции, P — произвольная формула),

$\boldsymbol{P}_2$. $S(t_1) = S(t_2) \supset t_1 = t_2$,

$\boldsymbol{P}_3$. $\neg(S(t) = \mathbf{0})$,

$\boldsymbol{P}_4$. $t + \mathbf{0} = t$,

$\boldsymbol{P}_5$. $t_1 + S(t_2) = S(t_1 + t_2)$,

$\boldsymbol{P}_6$. $\mathbf{0} \times t = \mathbf{0}$,

$\boldsymbol{P}_7$. $S(t_1) \times t_2 = t_1 \times t_2 + t_2$.

Аксиомы $\boldsymbol{P}_2$ и $\boldsymbol{P}_3$ обеспечивают существование нуля и операции «непосредственно следующий». Аксиомы $\boldsymbol{P}_4$–$\boldsymbol{P}_7$ представляют собой рекурсивные равенства, служащие определениями операций сложения и умножения.

С помощью правила MP из схемы аксиом $\boldsymbol{P}_1$ мы можем получить следующее правило индукции: из $P(\mathbf{0})$ и $\forall x\big(P(x) \supset P\big(S(x)\big)\big)$ выводится $\forall x P(x)$.

Аксиомы $\boldsymbol{P}_1$–$\boldsymbol{P}_3$ ввел Пеано[1] (1891 г.) для аксиоматизации натурального ряда.

Среди логических аксиом для теории первого порядка (параграф 5.5, тема «Аксиоматизация геометрии») присутствует аксиома:

$\boldsymbol{A}_4$. $\forall x A(x) \supset A(t)$, где $A(t)$ есть формула теории $\boldsymbol{T}$ и t есть терм теории $\boldsymbol{T}$, свободный для x в $A(x)$.

Сейчас удобно на примере системы $\boldsymbol{EA}$ пояснить, почему необходима аксиома $\boldsymbol{A}_4$ для определения теории первого порядка, — она предотвращает коллизию переменных.

Рассмотрим теорию $\boldsymbol{EA}$. Пусть $A(x)$ есть формула $\exists b(b = x + 1)$. Тогда $\forall x A(x)$, обозначающая формулу $\forall x \exists b(b = x + 1)$, — истинная формула при стандартной интерпретации $\boldsymbol{EA}$. Возьмем терм $t \equiv b$, тогда для терма t имеем формулу $\forall x \exists b(b = x+1) \supset \exists b(b = b+1)$. Формула $\exists b(b = b+1)$ ложна при стандартной интерпретации $\boldsymbol{EA}$, следовательно, формула $\forall x A(x) \supset A(t)$ ложна.

Основным средством вывода теорем в теории $\boldsymbol{EA}$ является, как и следовало ожидать, схема индукции. Рассмотрим в качестве примера вывод формулы $\mathbf{0} + x = x$ (она отличается от аксиомы $x + \mathbf{0} = x$). Обозначим $\mathbf{0} + x = x$ через $A(x)$. Сначала мы должны доказать $A(\mathbf{0})$, т. е. $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, но это частный случай упомянутой аксиомы. Теперь можем доказать $A(x) \supset A\big(S(x)\big)$. Предполагая воспользоваться теоремой дедукции, возьмем $A(x)$ в качестве гипотезы:

- $A(x)$ или $\mathbf{0} + x = x$ (гипотеза);

[1] Джузеппе Пеано (1858–1932 гг.) — итальянский математик. Внёс вклад в математическую логику, аксиоматику, философию математики.

- $\mathbf{0} + S(x) = S(\mathbf{0} + x)$ (частный случай аксиомы);
- $\mathbf{0} + x = x \supset S(\mathbf{0} + x) = S(x)$ (свойство равенства);
- $S(\mathbf{0} + x) = S(x)$ (modus ponens);
- $\mathbf{0} + S(x) = S(x)$ или $A\big(S(x)\big)$ (транзитивность равенства).

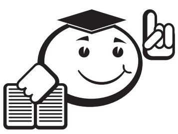
По теореме 7 (о дедукции) отсюда следует $\vdash A(x) \supset A\big(S(x)\big)$, а затем $\vdash \forall x\Big(A(x) \supset$ $\supset A\big(S(x)\big)\Big)$. Так как $A(\mathbf{0})$ уже доказано, то по схеме индукции получаем $\vdash \forall x A(x)$ или $\vdash \mathbf{0} + x = x$.

Аналогично доказываются другие простые теоремы ***EA***. Следует помнить, однако, что перед тем как доказывать какую-либо теорему (например, коммутативность умножения: $x \times y = y \times x$), полезно уже знать некоторые теоремы. Таким образом, даже доказательство простых теорем ***EA*** содержит в себе творческий момент — он состоит в наиболее рациональном выборе порядка, в котором эти теоремы следует доказывать.

Следующее утверждение является эмпирически установленным фактом: все рассуждения обычной (интуитивной) теории чисел, которые не апеллируют к произвольным действительным числам и функциям, могут быть формально воспроизведены в ***EA***.

Язык теории ***EA*** (как и любой язык теории первого порядка) можно расширить, введя новые функциональные символы и константы, которые «доказуемо выразимы» в языке. Это просто формальный вариант «введения новых обозначений». Их добавление к алфавиту сокращает формульные выводы и записи формул, но не увеличивает множество выводимых формул.

> У логики один недостаток: она не останавливается на полпути.
>
> *Д. Уиндем. День триффидов*



Список литературы по модулю

[1] Успенский В. А. Что такое аксиоматический метод? / В. А. Успенский. — Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001 — 96 с.

[2] История математики : в 3 т. / под ред. А. П. Юшкевича. — М. : Наука, 1972. — Т. III. — С. 215–217.

[3] Гильберт Д. Основания геометрии : пер. с нем. / Д. Гильберт ; под ред. А. В. Васильева. — Л. : Сеятель, 1923. — 152 с.