Модуль 2.6. Функции (отображения)

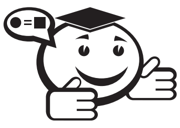
Функция из множества X во множество Y представляет собой специальное отношение на $X \times Y$, обладающее следующими свойствами:

1. Областью определения отношения является все множество X. Следовательно, для каждого элемента x из X существует элемент y из Y такой, что x и y связаны данным отношением.
2. Если x относится к y и x относится к z, то $y = z$. В терминах упорядоченных пар это утверждение означает, что если $\langle x, y\rangle$ и $\langle x, z\rangle$ принадлежат отношению, то $y = z$.

Такое определение понятия «функции» ввел Дирихле[1] (рис. 1). По сути дела, при таком определении мы отождествляем функцию с ее графиком. Это одно из возможных определений. Другое определение, когда функция рассматривается как правило вычисления некоторого значения, используется в главе 8.

Дадим более формальное определение функции.

Рис. 1 – Петер Дирихле



*Отношение f на $X \times Y$ называется **функцией** (или **отображением**) из X в Y и обозначается через $f\colon X \to Y$, если для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $y \in Y$, такой, что $\langle x, y\rangle \in f$. (Другими словами, из $\langle x, y\rangle \in f$ и $\langle x, z\rangle \in f$ следует $y = z$.)*

*Если f — функция, то вместо $\langle x, y\rangle \in f$ пишут $y = f(x)$ и говорят, что y — **значение, соответствующее аргументу** x.*

*Если используют термин «**отображение**» вместо термина «**функция**», то y называется **образом элемента** x.*

*Множество X называется **областью определения** функции f, а множество Y называется **областью потенциальных значений**.*

*Если $A \subseteq X$, то множество $f(A) = \{y \mid f(x) = y$ для некоторого x из $A\}$ называется **образом множества** A. Образ всего множества X называется **областью значений** функции f.*

*Если $B \subseteq Y$, то множество $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$ называется **прообразом множества** B.*

*Функция $f\colon X \to Y$ называется также **отображением**; при этом говорят, что f отображает X в Y. Если $\langle x, y\rangle \in f$, так что $y = f(x)$, то говорят, что элемент x отображается в элемент y.*

[1] Петер Дирихле (1805–1859 гг.) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел.

Поскольку функции являются бинарными отношениями, то к ним применим интуитивный принцип объемности, т. е. две функции f и g равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

Назовем f *n-местной* функцией из X в Y, если $f\colon X^n \to Y$. Тогда пишем $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ и говорим, что y — значение функции при значении аргументов $x_1, \ldots, x_n$.

Пример 1

1. Пусть $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, а $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Определим отношение $f \subseteq X \times Y$ как $f = \{\langle -2, 5\rangle, \langle -1, 2\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 5\rangle\}$.

2. Пусть $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Функция $f\colon X \to Y$ определена соотношением $f(x) = x^2 + 1$. Если $A = \{1, 2\}$, то $f(A) = \{y \mid \langle x, y\rangle \in f$ для некоторого x из $A\} = \{y \mid y = f(x)$ для некоторого x из $A\} = \{2, 5\}$ является образом A при отображении f.

Если $B = \{0, 2, 3, 4, 5\} \subseteq Y$, то $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} = \{-1, 1, -2, 2\}$ является прообразом B, где $-1 \in f^{-1}(B)$, т. к. $f(-1) = 2$, $1 \in f^{-1}(B)$, т. к. $f(1) = 2$, $-2 \in f^{-1}(B)$, т. к. $f(-2) = 5$, $2 \in f^{-1}(B)$, т. к. $f(2) = 5$. Заметим, что элементы 0, 3 и 4 не вносят никаких элементов в $f^{-1}(B)$, поскольку они не принадлежат области значений функции f.

Прообраз может быть пустым. Так, например, в случае $W = \{0, 3\}$ прообраз $f^{-1}(W)$ пуст, поскольку не существует такого $x \in X$, для которого $f(x) = 0$ или $f(x) = 3$.

Область значений функции f имеет вид $f(X) = \{y \mid f(x) = y$ для некоторого x из $X\} = \{1, 2, 5\}$. Элементами $f(X)$ являются те и только те элементы области потенциальных значений Y, которые «используются» функцией f.

3. Ортогональная проекция окружности A на прямую B (рис. 2).

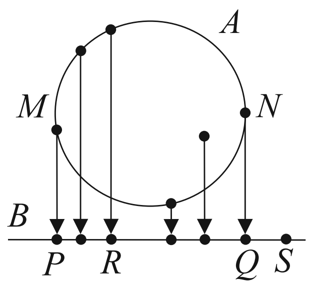


Рис. 2 – Ортогональная проекция

Образ окружности есть замкнутый отрезок $[P, S]$. Прообраз любой точки открытого отрезка (P, S) есть двухточечное множество на окружности; прообразы точек Q и P содержат только по одной точке, N и M соответственно; прообраз точки S есть пустое множество.

Пусть дана функция $f\colon X \to Y$. Подчеркнем еще раз три особенности нашего определения функции (рис. 3):

- несколько элементов из области определения X могут иметь один и тот же образ в области значений $(f(e) = f(d) = f(c) = 1)$;
- не все элементы из Y обязаны быть образом некоторых элементов X (нет элемента $x \in X$, такого, что $f(x) = 4$);
- для любого элемента из X, если существует образ, то он должен быть единственным (для функции недопустимо, чтобы одному элементу $x \in X$ соответствовало два разных значения $f(x)$).

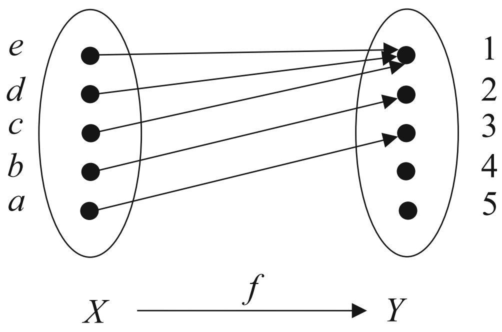


Рис. 3 – f: $\{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Замечание 3. Общие свойства образов и прообразов множеств при любых отображениях являются следствием следующих утверждений:

Пусть f: $X \to Y$ и $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$, тогда имеем:

а) $y \in f(A)$ тогда и только тогда, когда существует такой $x \in A$, что $y = f(x)$;

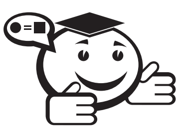
б) $x \in f^{-1}(B)$ тогда и только тогда, когда $f(x) \in B$;

в) из $x \in A$ следует $f(x) \in f(A)$.

Утверждение, обратное в), в общем случае не выполняется. Действительно, возьмем $f(x) = x^2$ и $A = [0, 1]$. Тогда если $x = -0.5$, то имеем $f(-0.5) = 0.25 \in$ $\in [0, 1] = f(A)$. Но $-0.5 \notin A$.

Функция f: $X \to Y$ может быть классифицирована в зависимости от того, существуют ли элементы из Y, связанные данным отношением с более чем одним элементом из X, и связан ли каждый элемент из области значений $f(X)$ с соответствующим элементом области определения X.

Инъективность



*Функция (отображение) $f : X \to Y$ называется **инъективной (инъективным)**, если для любых x_1, $x_2 \in X$, $y \in Y$ из $y = f(x_1)$ и $y = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$ (или, иначе, из $<x_1, y> \in f$ и $<x_2, y> \in f$ следует, что $x_1 = x_2$). Менее формально, функция f инъективна, если для всех x_1, x_2 выполняется: $x_1 \neq x_2$ влечет $f(x_1) \neq f(x_2)$. Инъекция также называется **вложением** (образ $f(X)$ «вкладывается» в Y).*

Сюръективность

Функция (отображение) $f\colon X \to Y$ называется ***сюръективной (сюръективным)****, если для любого элемента $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, такой, что $y = f(x)$. Сюръекция называется также* ***наложением*** *(образ $f(X)$ «накладывается» на Y).*

Биективность

Функция (отображение) f называется ***биективной (биективным)****, если f одновременно инъективна и сюръективна. Если существует биекция $f\colon X \to Y$, то говорят, что f осуществляет* ***взаимно однозначное соответствие*** *между множествами X и Y.*

Пример 2

Рассмотрим четыре функции, отображающие множество действительных чисел **R** во множество действительных чисел f_i: **R** → **R**, $i = 1, 2, 3, 4$:

1) функция $f_1(x) = e^x$ инъективна, но не сюръективна;
2) функция $f_2(x) = x^3 - x$ сюръективна, но не инъективна;
3) функция $f_3(x) = 2x + 1$ биективна;
4) функция $f_4(x) = x^2$ не является ни инъективной, ни сюръективной.

Рассмотрим три множества X, Y, Z, и пусть даны некоторые отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. Их можем записать в виде цепочки

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Рассматривая отображения f и g как отношения, мы можем применить к ним операцию композиции.

Композиция двух функций *f и g есть отношение $g \circ f = \{\langle x, z\rangle \mid$ существует такое y, что $y = f(x)$ и $z = g(y)\}$.*

Теорема 8. Композиция двух функций есть функция. При этом, если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, то $g \circ f\colon X \to Z$.

Доказательство. Действительно, если $\langle x, y\rangle \in g \circ f$ и $\langle x, z\rangle \in g \circ f$, то существует такое u, что $u = f(x)$, $y = g(u)$, и существует такое v, что $v = f(x)$, $z = g(v)$.

Поскольку f — функция, то $u = v$; поскольку g — функция, то $y = z$ и, следовательно, $g \circ f$ — функция. Вторая часть утверждения очевидна.

Таким образом, для любого $x \in X$ имеем $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Верно также и следующее утверждение.

. . . .

Теорема 9.

1. Композиция двух инъекций — инъекция.
2. Композиция двух сюръекций — сюръекция.
3. Композиция двух биекций — биекция.

. . . .

. . . .

Тождественным отображением *множества X в себя называется отображение e_X: $X \to X$, такое, что для любого $x \in X$ имеем $e_X(x) = x$. Тогда, если f: $X \to Y$, то $e_Y \circ f = f$, $f \circ e_X = f$.*

Пусть f^{-1} — отношение, обратное f. Выясним, при каких условиях отношение f^{-1} будет функцией. Его называют тогда ***обратной функцией*** *или, если f осуществляет отображение множества X во множество Y,* ***обратным отображением****.*

. . . .

. . . .

Теорема 10. Отображение f: $X \to Y$ имеет обратное отображение f^{-1}: $Y \to X$ тогда и только тогда, когда f — биекция.

. . . .

Доказательство. Если f — биекция, то, поскольку f сюръективно, f^{-1} определено на множестве Y. Кроме того, f^{-1} — функция, так как если $<y, x_1> \in f^{-1}$ и $<y, x_2> \in f^{-1}$, то $<x_1, y> \in f$ и $<x_2, y> \in f$, а в силу инъективности f имеем $x_1 = x_2$.

Пусть теперь отображение f имеет обратное отображение f^{-1}, определенное на множестве Y со значениями во множестве X. Тогда f сюръективно, поскольку любой элемент $y \in Y$ имеет прообраз $x \in X$. При этом f инъективно, так как если $<x_1, y> \in f$ и $<x_2, y> \in f$, то $<y, x_1> \in f^{-1}$ и $<y, x_2> \in f^{-1}$, а поскольку f^{-1} — функция, то $x_1 = x_2$.

Пусть f: $X \to Y$. Заметим, что для того, чтобы обратное отношение f^{-1} было функцией на $f(X)$, достаточно инъективности функции f. Поэтому функция $f(x) = x^2$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, не будучи биекцией, не имеет обратной функции. Эта функция не имеет обратной, если даже она будет отображением на множество неотрицательных вещественных чисел.

Поскольку функция есть отношение, то выполняются следующие свойства инъективных функций f и g:

1) $(f^{-1})^{-1} = f$;

2) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Если f: $X \to Y$ — биекция, то $f^{-1} \circ f = e_X$ и $f \circ f^{-1} = e_Y$.