Модуль 2.2. Операции над множествами

Рассмотрим методы получения новых множеств из уже существующих.

Объединением *множеств A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами множества A или/и B:*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или/и } x \in B\}.$$

Пересечением *множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого являются элементами обоих множеств A и B:*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Очевидно, что выполняются включения $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ и $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$. Говорят, что два множества ***не пересекаются***, если их пересечение — пустое множество.

Относительным дополнением *множества A до множества X называется множество $X \backslash A$ всех тех элементов множества X, которые не принадлежат множеству A:*

$$X \backslash A = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin A\}.$$

Симметрическая разность *$A \Delta B$ состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B:*

$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

Множество $X \backslash A$ называют также ***разностью множеств*** *X и A.*

Операцию абсолютного дополнения, как правило, вводят лишь тогда, когда фиксирован универсум $\boldsymbol{U}$ (в данном случае под универсумом понимается некоторое множество, для которого все рассматриваемые в определенном контексте множества являются подмножествами).

Абсолютным дополнением *множества A называется множество $\overline{A}$ всех тех элементов x, которые не принадлежат множеству A:*

$$\overline{A} = \{x \mid x \in \boldsymbol{U} \text{ и } x \notin A\}.$$

Заметим, что $\overline{A} = \boldsymbol{U} \backslash A$. Часто вместо $\overline{A}$ будем писать $\neg A$ (символ $\neg$ используется также для обозначения отрицания в логике высказываний (см. главу 4).

Первым стал использовать теперь общепринятые обозначения операций над множествами Пеано[1] (1888 г.).

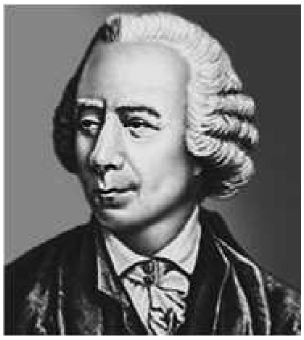


Рис. 1 – Леонардо Эйлер

При решении целого ряда задач Эйлер[2] (рис. 1) использовал идею изображения множеств с помощью кругов. В этом случае множества обозначают кругами или просто овальными областями на плоскости и внутри этих областей условно располагают элементы множества. Часто все множества на диаграмме размещают внутри квадрата, который представляет собой универсум $\boldsymbol{U}$. Если элемент принадлежит более чем одному множеству, то на диаграмме области, отвечающие таким множествам, должны перекрываться, чтобы общий элемент мог одновременно находиться в соответствующих областях (рис. 2).

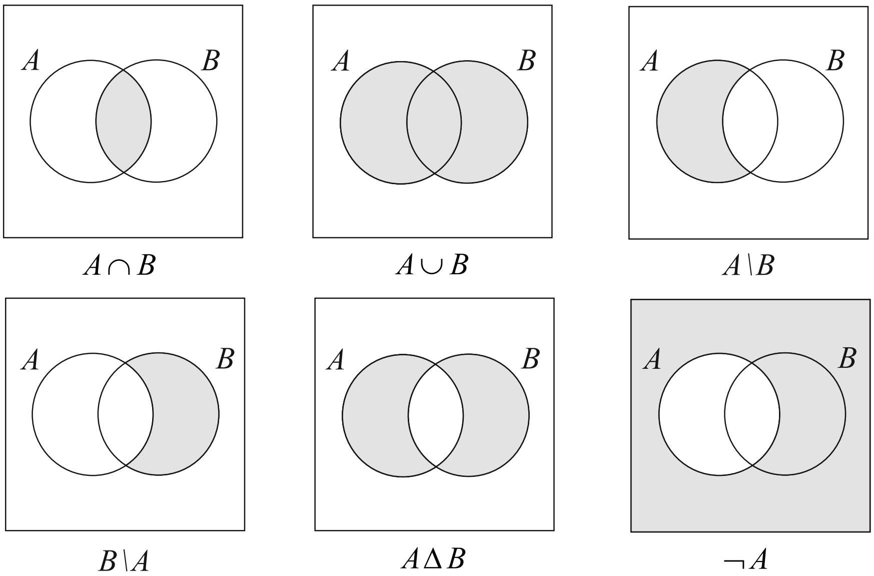


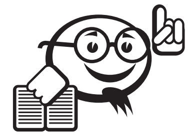
Рис. 2 – Операции над множествами

Здесь не имеет значения относительный размер кругов либо других замкнутых областей, но лишь их взаимное расположение. Безусловно, такие диаграммы могут играть в математике лишь ту роль, что чертежи в геометрии: они иллюстрируют, помогают представить и доказать.

Объединение, пересечение и дополнение обычно называются ***булевыми операциями***, составленные из множеств с их помощью выражения — ***булевыми выражениями***, значение такого выражения — ***булевой комбинацией*** входящих в него множеств, а равенство двух булевых выражений — ***булевым тождеством***.

[1]Джузеппе Пеано (1858–1932 гг.) — итальянский математик. Внёс вклад в математическую логику, аксиоматику, философию математики.

[2]Леонард Эйлер (1707 г., Швейцария — 1783 г., Санкт-Петербург, Российская империя) — швейцарский, немецкий и российский математик и механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук. Почти полжизни провёл в России.



Теорема 1. Для любых подмножеств A, B и C универсума $\boldsymbol{U}$ выполняются следующие основные булевы тождества:

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$).

1′. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$).

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$).

2′. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$).

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$).

3′. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$).

4. $A \cup \varnothing = A$.

4′. $A \cap \boldsymbol{U} = A$.

5. $A \cup \neg A = \boldsymbol{U}$.

5′. $A \cap \neg A = \varnothing$.

6. $A \cup A = A$ (идемпотентность $\cup$).

6′. $A \cap A = A$ (идемпотентность $\cap$).

7. $A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$.

7′. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

8. $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$.

8′. $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$.

9. $A \cup (A \cap B) = A$.

9′. $A \cap (A \cup B) = A$.

Тождества 8 и 8′ называются законами де Моргана[1], а тождества 9 и 9′ — законами поглощения.

Доказательство. Докажем тождество 3. Сначала покажем, что $A \cup (B \cap C)$ есть подмножество $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Действительно, если $x \in A \cup (B \cap C)$, то $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, x принадлежит $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Отсюда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а значит, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Теперь покажем, что выполнено $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$. Если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in A$ или $x \in B$ и $x \in C$, т. е. $x \in B \cap C$. Отсюда $x \in A \cup (B \cap C)$.

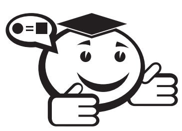
Докажем тождество 8. Пусть $x \in \neg(A \cup B)$. Тогда $x \in \boldsymbol{U}$ и $x \notin A \cup B$. Следовательно, $x \notin A$ и $x \notin B$. Отсюда $x \in \neg A$ и $x \in \neg B$, а значит, x принадлежит $\neg A \cap \neg B$. Итак,

[1] Огастес де Морган (1806–1871 гг.) — шотландский математик и логик; к своим идеям в алгебре логики пришёл независимо от Дж. Буля.

$\neg(A \cup B) \subseteq \neg A \cap \neg B$. Пусть теперь $x \in \neg A \cap \neg B$. Тогда $x \in \neg A$ и $x \in \neg B$. Следовательно, $x \in \boldsymbol{U}$ и $x \notin A$ и $x \notin B$. Значит, x не принадлежит $A \cup B$, т.е. $x \in \neg(A \cup B)$. Итак, $\neg A \cap \neg B \subseteq \neg(A \cup B)$.

Остальные тождества доказываются аналогично. Рекомендуется сделать это самостоятельно. Если какое-то тождество не выполняется для произвольных непустых множеств, то всегда можно построить контрпример, используя круги Эйлера. Но оказывается с помощью диаграмм можно и доказывать.

Для этого используются частный случай кругов Эйлера — диаграммы Венна[1]. При n, равном 2 и 3, диаграммы Венна обычно изображаются в виде кругов. Пусть даны множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n > 1$. Начертим диаграмму Венна, изображающую эти множества таким образом, чтобы все подмножества вида $Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_n$, где Y_k обозначает либо A_k, либо $\neg A_k$, были не пусты. В этом случае всевозможные комбинации $Y_1 \cap Y_2 \cap \ldots \cap Y_n$ называются составляющими системы множеств $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.



Составляющие системы множеств *$\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ задаются следующим индуктивным определением.*

Базис. *Составляющие $\{A_1\}$ суть само A_1 и его дополнение.*

Шаг. *Если S — составляющая $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$, то $S \cap A_n$ и $S \cap \cap \neg A_n$ — составляющие $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.*

Система множеств ***независима***, *если все ее составляющие не пусты.*

На рисунках 3, 4 изображены независимые системы множеств. Для $n = 4$ независимая система изображается четырьмя равными эллипсами или требуются невыпуклые фигуры. Для $n > 3$ диаграмму Венна кругами изобразить невозможно.

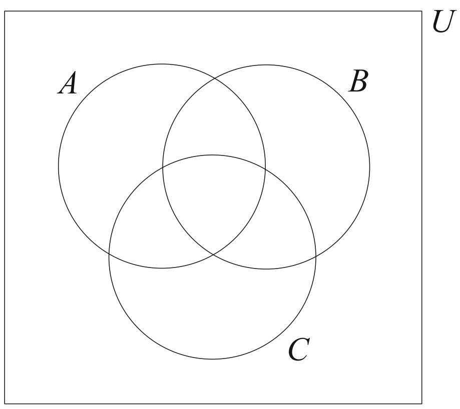


Рис. 3 – Диаграмма Венна для трех множеств

[1]Этот вид диаграмм предложил и детально разработал Джон Венн (1834–1923 гг.) — английский логик и философ.

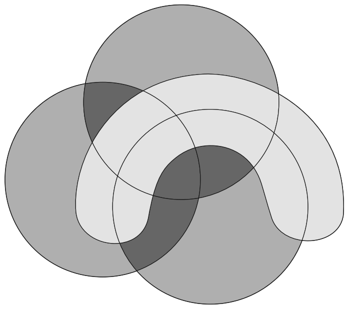


Рис. 4 – Диаграмма Венна для четырех множеств

Теорема 2 (Венн). Если булево тождество выполнено для некоторой независимой системы множеств, то оно выполнено для любой системы множеств.

Доказательство см. в [1, с. 79].

Теорема 3. Предложения о произвольных множествах A и B попарно эквивалентны:

1) $A \subseteq B$;
2) $A \cap B = A$;
3) $A \cup B = B$.

Доказательство. Докажем, что из первого предложения следует второе. Действительно, так как $A \cap B \subseteq A$, то достаточно показать, что в этом случае $A \subseteq A \cap B$. Но если $x \in A$, то $x \in B$, так как $A \subseteq B$, и, следовательно, $x \in A \cap B$.

Докажем, что из второго предложения следует третье. Так как $A \cap B$ равно A, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$. По закону поглощения (см. тождество 9) $B \cup (A \cap B) = B$. Отсюда, используя закон коммутативности, получаем равенство $A \cup B = B$.

Докажем, что из третьего предложения следует первое. Так как $A \subseteq A \cup B$, а по условию третьего предложения $A \cup B = B$, то $A \subseteq B$.

Список литературы по модулю

[1] Непейвода Н. Н. Прикладная логика : учеб. пособие / Н. Н. Непейвода. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.