

Модуль 1.1. О логике

Что такое математическая логика? Прежде чем выяснить это, необходимо ответить на вопрос — что есть логика? Перечислим несколько различных определений, серьезных и не очень.

Джон Локк (John Locke; 1632–1704 гг., английский философ): «Логика есть анатомия мышления».

Джон Стюарт Милль (John Stuart Mill; 1806–1873 гг., английский философ): «Логика не тождественна знанию, хотя область ее и совпадает с областью знания. Логика есть общий ценитель и судья всех частных исследований. Она не задается целью находить очевидность; она только определяет, найдена очевидность или нет. Логика не наблюдает, не изобретает, не открывает — она судит. <...> Итак, логика есть наука об отправлениях разума, служащих для оценки очевидности; она есть учение как о самом процессе перехода от известных истин к неизвестным, так и о всех других умственных действиях, поскольку они помогают этому процессу».

Льюис Кэрролл (Lewis Carroll, настоящее имя Charles Lutwidge Dodgson; 1832–1898 гг., английский писатель, математик, логик, философ): «Траляля: «Если бы это было так, это бы еще ничего, а если бы ничего, оно бы так и было, но так как это не так, так оно и не этак! Такова логика вещей!»».

Из книги «Алиса в Зазеркалье», перевод Н. Демуровой.

Джеймс Тёрбер (James Thurber; 1894–1961 гг., американский художник газетных сатирических комиксов, писатель и юморист): «If you can touch the clocks and never start them, then you can start the clocks and never touch them¹. That's logic, as I know and use it» [1].

Амброз Бирс (Ambrose Bierce; 1842–1913 гг., американский писатель, журналист, автор юмористических и «страшных» рассказов) [2]: «Логика (сущ.). Искусство размышлять и излагать мысли в неукоснительном соответствии с людской ограниченностью и неспособностью к пониманию. Основа логики — силлогизм, состоящий из большой и меньшей посылок и вывода. Например:

Большая посылка: Шестьдесят людей способны сделать определенную работу в шестьдесят раз быстрее, чем один человек.

Меньшая посылка: Один человек может выкопать яму под столб за 60 секунд.

Вывод: Шестьдесят людей могут выкопать яму под столб за 1 секунду.

Это можно назвать арифметическим силлогизмом, где логика соединена с математикой, что дает нам двойную уверенность в правильности вывода».

Бертран Рассел (Bertrand Russell; 1872–1970 гг., британский философ, общественный деятель и математик) [3]: «Логика. Деятельность может обеспечить только одну половину мудрости; другая половина зависит от воспринимающей бездеятельности. В конечном счете, спор между теми, кто основывает логику на «истине», и теми, кто основывает ее на «исследовании», происходит из различия в ценностях и на определенном этапе становится бессмысленным.

В логике будет пустой тратой времени рассматривать выводы относительно частных случаев; мы имеем дело всегда с совершенно общими и чисто формаль-

¹Если вы можете трогать часы и никогда не завести их, то вы можете завести часы, их не трогая (перевод мой — В. З.).

ными импликациями, оставляя для других наук исследование того, в каких случаях предположения подтверждаются, а в каких нет.

Хотя мы больше не можем довольствоваться определением логических высказываний как вытекающих из закона противоречия, мы можем и должны все же признать, что они образуют класс высказываний, полностью отличный от тех, к знанию которых мы приходим эмпирически. Все они обладают свойством, которое <...> мы договорились называть «тавтологией». Это, в сочетании с тем фактом, что они могут быть выражены исключительно в терминах переменных и логических констант (где логическая константа — это то, что остается постоянным в высказывании, даже когда все его составляющие изменяются), даст определение логики или чистой математики».

Непейвода Н. Н. (Непейвода Николай Николаевич; род. 1949 г., советский и российский математик, учёный в области теоретической информатики и математической логики) [4]: «Логика — наука, изучающая с формальной точки зрения понятия, методы их определения и преобразования, суждения о них и структуры доказательных рассуждений».

Высказанные определения дают предварительную картину логики. В дальнейшем мы обстоятельно и более точно познакомимся с логикой, используемой в математике.

В отличие от ремесла и искусства наука невозможна без доказательств и логики. Вольно говоря, доказательства — это кирпичи, из которых строятся научные теории; логика — цемент, скрепляющий эти кирпичи. Хорошая идея ничего не стоит, если ее невозможно доказать, — она должна быть рационально обоснована, а этого не добиться без прочного и надежного логического фундамента.



.....

Доказательство — это рациональный логический переход от принятой точки зрения (**предпосылки**) к тому рубежу, где ее необходимо обосновать или подтвердить (**вывод**). Предпосылки — это некоторые основные положения, принятые (хотя бы временно), для того чтобы можно было осуществить доказательство. Предпосылки могут быть установлены различными способами: логически, эмпирически (на основе наблюдений и опыта) или могут быть следствием уже доказанных положений. Переход от предпосылок к выводам осуществляется с помощью рассуждений. Надежность доказательства в целом определяется точностью предпосылок.

Логика — наука об анализе доказательств, аргументов и установлении принципов, на основании которых могут быть сделаны надежные рассуждения.

.....

Логике интересуют лишь форма наших мыслей, но не их содержание. Разнообразие содержания укладывается в сравнительно небольшое число форм. Грубо говоря, логику интересуют сосуды — бутылки, ведра, бочки, — а не то, что в них налито.

В этом отношении логика сходна с грамматикой, которую мы изучали в школе. Грамматика тоже исследует и описывает формы языковых выражений, отвлекаясь от их содержания. Известное стихотворение «Бармаглот» из «Алисы в Зазеркалье» Льюиса Кэрролла начинается со следующих строк:

*Варкалось. Хливкие шорьки
Пырялись по наве.
И хрюкотали зелюки,
Как мюмзики в мове. . .*

Знание грамматики позволяет нам обнаружить, что в этих строчках является подлежащим, сказуемым и т. д. Мы можем говорить о роде, числе, падеже наших существительных, не имея ни малейшего представления о том, что обозначают соответствующие слова. Более того, как говорит Алиса об этих строках: они «наводят на всякие мысли, хоть и неясно — на какие». Аналогичное знание о формах мысли дает нам логика.

При изучении логики мы вводим различные формальные языки. Дело в том, что формальные языки всегда проще, чем структура естественных языков. Иногда естественный язык может быть очень сложен.

Вот как, например, **Марк Твен** обыгрывает особенности словообразования в немецком языке [5, с. 59]: «В одной немецкой газете, — уверяет он, — я сам читал такую весьма занятную историю:

*Готтентоты (по-немецки: **хоттенготен**), как известно, ловят в пустынях кенгуру (по-немецки: **бейтельратте** — сумчатая крыса). Они обычно сажают их в клетки (**коттэр**), снабженные решетчатыми крышками (**латтенгиттер**) для защиты от непогоды (**веттер**).*

*Благодаря замечательным правилам немецкой грамматики все это вместе — кенгуру и клетки — получают довольно удобное название **латтенгиттерветтеркоттэрбейтельратте**.*

Однажды в тех местах, в городе Шраттертроттэле, был схвачен негодяй, убивший готтентотку, мать двоих детей.

*Такая же женщина по-немецки должна быть названа **хоттенготенмуттер**, а ее убийца сейчас же получил в устах граждан имя **шраттертроттэльхоттенготенмуттэрраттэнтэтэр**, ибо убийца — по-немецки **аттэнтэтэр**.*

Преступника поймали и за неимением других помещений посадили в одну из клеток для кенгуру, о которых выше было сказано. Он бежал, но снова был изловлен. Счастливый своей удачей, негр-охотник быстро явился к старшине племени.

— Я поймал этого. . . Бейтельратте? Кенгуру? — в волнении вскричал он.

— Кенгуру? Какого? — сердито спросил потревоженный начальник.

— Как какого? Этого самого! Латтенгиттерветтеркоттэрбейтельратте.

— Яснее! Таких у нас много. . . Непонятно, чему ты так радуешься?

— Ах ты, несчастье какое! — возмутился негр, положил на землю лук и стрелы, набрал в грудь воздуха и выпалил:

— Я поймал шраттертроттэльхоттенготенмуттэрраттэнтэтэрлаттенгиттерветтеркоттэрбейтельратте! Вот кого!

Тут начальник подскочил, точно подброшенный пружиной:

— Так что же ты мне сразу не сказал этого так коротко и ясно, как сейчас?!».

Примерами доказательных рассуждений являются приведенные выше цитаты из произведений Амброза Бирса и Джеймса Тёрбера. Эти же цитаты есть примеры *дедукции*. При дедуктивном доказательстве заключение выводится из предпосылки, и доказательство считается «обоснованным». «Надежное» доказательство, проводимое по логическим законам, гарантирует верный вывод, если предпосылки верны. Но логически законы действуют и в случае, когда предпосылки ложны. Следующее рассуждение является логически корректным, несмотря на ложность предпосылок.

Все марсиане имеют деревянные ноги.

Геракл — марсианин.

Следовательно, у Геракла — деревянные ноги.

Вывод дедуктивного доказательства скрыт в его предпосылках; иными словами, вывод «не выходит за пределы» предпосылки и не добавляет к ней ничего нового. Невозможно, таким образом, принять предпосылки и отвергать вывод, не вступая во внутреннее противоречие.

Другой основной метод доказательства — *индукция*. В типичном индуктивном рассуждении основной закон или принцип следует из определенных наблюдений за внешним миром. Например, множество наблюдений показывает, что млекопитающие рожают детенышей, и индуктивно можно заключить, что так размножаются все млекопитающие. Подобное доказательство не может быть строго обоснованным (в отличие от дедуктивного), его заключение не обязательно следует из предпосылки. Так, существование яйцекладущих млекопитающих — ехидны и утконоса — опровергает казавшееся таким правдивым заключение. Индуктивное доказательство всегда выходит за рамки предпосылки, которая не влечет за собой обязательную истинность заключения, но предполагают его возможность. Индуктивные доказательства — это обобщения и всевозможные экстраполяции от частного к общему; от наблюдаемого к ненаблюдаемому; от прошлого и настоящего — к будущему.

Ошибки при индуктивном доказательстве могут приводить к серьезным последствиям. Г. Попов¹ считает, что индуктивное доказательство о классовом расколе крестьян в России, проделанное В. И. Лениным в книге «Развитие капитализма в России» на базе статистических отчетов и обследований, является ошибочным² [6].

В человеческих отношениях логика не является обязательной, но часто приносит пользу. Но и алогичные рассуждения иногда тоже оказываются полезными. Приведем две шутки.

Дровосек и математик. «Дровосек пришел к математику и просит у него рубль взаймы. При этом он обещает через месяц вернуть два рубля, а в залог оставляет свой топор. Математик дает дровосеку рубль, а когда тот собирается уходить, говорит:

¹Гавриил Харитонович Попов — советский экономист и российский политик. Один из видных лидеров демократического движения в СССР и России в конце 1980-х — начале 1990-х годов.

²Г. Попов сообщает о характерной детали личности В. И. Ленина: он отлично владел дедукцией, но был слабым в индукции — единственная оценка «хорошо» в гимназическом аттестате Ленина была как раз по логике.

— Постой, я кое-что придумал. Тебе ведь будет трудно возвращать через месяц сразу два рубля. Так может, ты лучше вернешь половину долга сейчас?

После долгих раздумий дровосек соглашается, отдает рубль математику и идет домой.

— Странно! — думает он по дороге. — Денег у меня по-прежнему нет, топора тоже, да еще один рубль я остался должен. И что самое главное, всё правильно!».

Ирландец и пиво. «Ирландец заходит в дублинский бар и заказывает три пинты «Гиннеса». Получив заказ, он делает глоток сначала из первой кружки, потом из второй, затем из третьей, — и продолжает пить тем же манером, пока кружки не пустеют. После этого он повторяет свой заказ.

— Может, лучше заказывать по одной? Тогда пена не успеет осесть, — предупредительно замечает бармен.

— Я знаю, — отзывается посетитель. — Но, видите ли, в чем дело: у меня есть два брата, один из них сейчас в Австралии, а другой — в Америке. Когда мы расставались, то поклялись друг другу, что будем пить именно так — в память о тех днях, когда мы выпивали вместе. Так что две пинты я беру для братьев, а третью — для себя.

— Какая прекрасная традиция! — восклицает растроганный бармен.

Ирландец стал в этом баре постоянным посетителем, всякий раз делая один и тот же заказ. Однако как-то раз, в очередной свой визит, он заказал всего две пинты. Это заметили другие завсегдатаи, и над баром повисла тишина. Когда ирландец подошел к стойке за следующей порцией, бармен произнес:

— Примите мои соболезнования!

— Не волнуйтесь, все в порядке! — отозвался ирландец. — Просто я стал мормоном, и мне пришлось бросить пить».



Список литературы по модулю

- [1] Thurber James. The Thirteen Clocks / James Thurber. — Simon & Schuster, 1950. — 124 p.
- [2] Бирс Амброс. Словарь Сатаны / Амброс Бирс. — М. : Центрполиграф, 2003.
- [3] Рассел Б. Философский словарь разума, материи и морали / Б. Рассел. — Киев : Изд-во Port-Royal, 1996.
- [4] Непейвода Н. Н. Прикладная логика : учеб. пособие / Н. Н. Непейвода. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.
- [5] Никифоров А. Книга о логике / А. Никифоров. — М. : Гнозис, 1996.
- [6] Попов Г. Ошибка в проекте. Ленинский тупик / Г. Попов. — М. : Издательский дом Международного университета в Москве, 2008. — 512 с.