ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 7. ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Модуль 7.5. Асимптотические обозначения

Зюзьков Валентин Михайлович

Говорят, что функция g мажорирует функцию f (или «f растет не быстрее g»), если существует действительное положительное число c и натуральное число n_0 такое, что $f(n) \leq cg(n)$ для всех $n \geq n_0$.

Если g мажорирует f, это обозначается как

$$f(n) = O(g(n)).$$

Символ $O(g(n))$ читается как «O большое от $g(n)$»; при этом говорят, что «$f(n)$ имеет порядок O большое от $g(n)$».

Пример 1

$$(1/2)n^2 - 3n = O(n^2).$$

При $c = 1/2$ и $n_0 = 1$ имеем $n^2/2 - 3n \leq cn^2$ выполняется для всех $n \geq n_0$.

Пример 2

При $a > 0$ можно записать $an + b = O(n^2)$ (положим, $c = a + |b|$ и $n_0 = 1$).

Пример 3

Функция $f(n) = an^2 + bn + d$, где a, b и d – некоторые константы и $a > 0$.

Имеем $f(n) = O(n^2)$.

Теорема. Сводка результатов о сравнении функций

1. Если $f(n) = O(g(n))$, то $cf(n) = O(g(n))$.
2. Если $f(n) = O(g(n))$ и $h(n) = O(g(n))$, то $(f + g)(n) = O(g(n))$.
3. Если $f(n) = O(g(n))$ и $h(n) = O(e(n))$, то $(f \times h)(n) = O(g \times e)(n))$.
4. Если $f(n) = O(g(n))$ и $g(n) = O(h(n))$, то $f(n) = O(h(n))$.
5. Если r и s — действительные числа, $r \leq s$ и $n > 1$, тогда $n^r = O(n^s)$.
6. Если $p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$, то $p(n) = O(n^k)$.
7. Для целых чисел a и b, больших единицы, $log_a(n) = O(log_b(n))$.
8. Пусть n — неотрицательное целое число, тогда $n = O(2^n)$.
9. Для целых чисел a, больших единицы, $log_a(n) = O(n)$.
10. Пусть n — неотрицательное целое число, тогда $n! = O(n^n)$.
11. Пусть $a > 1$ и n — неотрицательное целое число, тогда $log_a(n!) = O(n\, log_a(n))$.

Пример

Определим число арифметических операций, необходимых для **умножения двух матриц**.

Пусть матрицы A и B имеют размеры $m \times p$ и $p \times k$ соответственно. Тогда алгоритм умножения матриц $A \times B = C$ можно описать на Паскале следующим образом:

```
for i:= 1 to m do
    for j:= 1 to k do
      begin
      C[i,j]:= 0;
      for s:= 1 to p do
        C[i,j]:= C[i,j]+A[i,s]*B[s,j];
end;
```

Пусть $n = \max(m, k, p)$.

Тогда число выполняемых арифметических операций имеет порядок $O(n^3)$.

Благодарю за внимание!