ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 7. ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Модуль 7.2. Частично-рекурсивные функции

Зюзьков Валентин Михайлович

Основная идея – получение всех вычислимых функций из ограниченного множества базисных функций с помощью простейших алгоритмических средств.

Множество исходных функций таково:

- постоянная функция $0(\boldsymbol{x}) = 0$;
- одноместная функция следования $s(x) = x + 1$;
- функция проекции pr_i, $1 \le i \le k$, $pr_i(\boldsymbol{x}) = x_i$.

Оператор суперпозиции

Говорят, что k-местная функция $f(\boldsymbol{x})$ получена с помощью суперпозиции из m-местной функции $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и k-местных функций $g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x})$, если $f(\boldsymbol{x}) = \varphi(g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))$.

Примитивная рекурсия

При $n \geq 0$ из n-местной функции f и $(n + 2)$-местной функции g строится $(n + 1)$-местная функция h по следующей схеме:

- $h(\boldsymbol{x}, 0) = f(\boldsymbol{x})$,
- $h(\boldsymbol{x}, y+1) = g(\boldsymbol{x}, y, h(\boldsymbol{x}, y))$.

При $n = 0$ получаем (a – константа):

- $h(0) = a$;
- $h(y+1) = g(y, h(y))$.

Оператор минимизации

Эта операция ставит в соответствие частичной функции f: $\boldsymbol{N}^{k+1} \to \boldsymbol{N}$ частичную функцию h: $\boldsymbol{N}^{k} \to \boldsymbol{N}$, которая определяется так ($\boldsymbol{x} = <x_1, \ldots, x_k>$):

- область определения $D_h = \{\boldsymbol{x} \mid$ существует $x_{k+1} \geq 0$, $f(\boldsymbol{x}, x_{k+1}) = 0$ и $<\boldsymbol{x}, y> \in D_f$ для всех $y \leq x_{k+1}\}$;
- $h(\boldsymbol{x})$ – наименьшее значение y, при котором $f(\boldsymbol{x}, y) = 0$.

Оператор минимизации обозначается так:

$$h(\boldsymbol{x}) = \mu y[f(\boldsymbol{x}, y) = 0].$$

Очевидно, что даже если f всюду определена, но нигде не обращается в 0, то $\mu y[f(\boldsymbol{x}, y) = 0]$ нигде не определена.

Естественный путь вычисления $h(\boldsymbol{x})$ состоит в подсчете значения $f(\boldsymbol{x}, y)$ последовательно для $y = 0, 1, 2,\ldots$ до тех пор, пока не найдется y, обращающее $f(\boldsymbol{x}, y)$ в 0.

Этот алгоритм не остановится, если $f(\boldsymbol{x}, y)$ нигде не обращается в 0.

Все функции, которые можно получить из базисных функций за конечное число шагов только с помощью трех указанных механизмов, называются **частично-рекурсивными.**

Если функция получается всюду определенная, то тогда она называется **общерекурсивной.**

Если функция получена без механизма минимизации, то в этом случае она называется **примитивно-рекурсивной.**

Любую примитивно-рекурсивную функцию можно вычислить с помощью цикла *for*, так как верхнюю границу для числа повторений можно указать заранее.

Оператор минимизации позволяет описать функции, которые нельзя вычислить за заранее ограниченное число итераций, для вычисления их значений требуется цикл *while*.

Пример частично-рекурсивных функций. Сложение двух чисел

$$sum: \langle x, y \rangle \to x + y.$$

Эта функция является **общерекурсивной** в силу примитивной рекурсии

$$sum(x, 0) = pr_1(x) = x,$$

$$sum(x, y + 1) = s(sum(x, y)) = sum(x, y) + 1.$$

Умножение двух чисел

$$prod\colon \langle x, y\rangle \to xy.$$

Используем примитивную рекурсию

$$prod(x, 0) = 0(x) = 0,$$

$$prod(x, y+1) = sum(prod(x, y), x).$$

Усеченное вычитание 1

$$\delta(x) = x - 1, \text{ если } x > 0,$$

$$\delta(0) = 0.$$

Эта функция примитивно-рекурсивна.
Действительно,

$$\delta(0) = 0 = 0(x),$$

$$\delta(y+1) = y = pr_2(<x, y>).$$

Усеченная разность

$$x \dot{-} y = x - y, \text{ если } x \geq y,$$

$$x \dot{-} y = 0, \text{ если } x < y.$$

Эта функция примитивно-рекурсивна.
Действительно,

$$x \dot{-} 0 = x,$$

$$x \dot{-} (y+1) = \delta(x \dot{-} y).$$

Модуль разности

$$|x - y| = x - y, \text{ если } x \geq y,$$
$$|x - y| = y - x, \text{ если } x < y.$$

Эта функция примитивно-рекурсивна в силу суперпозиции

$$|x - y| = (x \div y) + (y \div x).$$

Знак числа

$$sg(x) = 0, \text{ если } x = 0,$$
$$sg(x) = 1, \text{ если } x > 1.$$

В силу рекурсии

$$sg(0) = 0,$$
$$sg(y + 1) = 1.$$

Остаток от деления y на x

$$rm(x, y) = \begin{cases} \text{остаток от деления } y \text{ на } x, \text{ если } x \neq 0, \\ y, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

В силу рекурсии и суперпозиции

$$rm(x, 0) = 0,$$

$$rm(x, y+1) = prod(s(rm(x, y)), sg(|x - s(rm(x, y))|)).$$

Используя минимизацию (μ-оператор), можно получать частично-определенные функции из всюду определенных функций.

Например, полагая что $f(x, y)$ есть частично-рекурсивная функция $|x - y^2|$, мы обнаруживаем, что $g(x) = \mu y[f(x, y) = 0]$ – не всюду определенная функция.
$g(x) = \sqrt{x}$, если x есть точный квадрат,
и не определена в противном случае.

Функция Аккермана

$$f(0, y) = y + 1,$$

$$f(x + 1, 0) = f(x, 1),$$

$$f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y)).$$

Это пример всюду определенной, но не примитивно-рекурсивной функции.

ТУСУР TUSUR UNIVERSITY

Благодарю за внимание!