ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 7. ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Модуль 7.1. Неформальная вычислимость и машины Тьюринга

Зюзьков Валентин Михайлович

Алгоритм — некоторое формальное предписание, действуя согласно которому, можно получить решение задачи.

Основные особенности алгоритма

- Определенность. Алгоритм разбивается на отдельные шаги (этапы), каждый из которых должен быть простым и локальным.
- Ввод. Алгоритм имеет некоторое (быть может, равное нулю) число входных данных, т. е. величин, заданных ему до начала работы.
- Вывод. Алгоритм имеет одну или несколько выходных величин, т. е. величин, имеющих вполне определенное отношение к входным данным.
- Детерминированность. После выполнения очередного шага алгоритма однозначно определено, что делать на следующем шаге.

Пусть **N** обозначает множество натуральных чисел {0, 1, 2,...}.

Объекты, которые мы будем рассматривать, будут функциями с областью определения $D_f \subseteq \boldsymbol{N}^k$ (k – целое положительное число) и областью значений $R_f \subseteq \boldsymbol{N}$.

Такие функции будем называть ***k*-местными частичными.**

Назовем k-местную функцию f: $\boldsymbol{N}^k \to \boldsymbol{N}$ **вычислимой**, если существует алгоритм A, её вычисляющий, т. е. такой алгоритм A, что:

- если на вход алгоритма A поступил вектор $\boldsymbol{x} = <x_1, x_2,\ldots, x_k>$ из D_f, то вычисление должно закончиться после конечного числа шагов и выдать $f(\boldsymbol{x})$;
- если на вход алгоритма A поступил вектор $\boldsymbol{x}$, не принадлежащий области определения D_f, то алгоритм A никогда не заканчивается.

Определение вычислимости в терминах воображаемой вычислительной машины было дано английским математиком Аланом Тьюрингом в 1936 г.

Машина Тьюринга

В любой момент времени в машине обозревается лишь одна ячейка памяти.

Устройство содержит конечный список инструкций (или состояний) $q_0, q_1, \ldots, q_n$.

Каждая инструкция может указать два возможных направления действий: одного нужно придерживаться, если на обозреваемой ячейке ленты находится 0, а другого – если там находится 1.

В любом случае следующее действие может состоять из таких трех типов элементарных шагов:

- символ (возможно, такой же, как старый) пишется на обозреваемой ячейке ленты, при этом предыдущий символ стирается;
- лента сдвигается на одну ячейку влево или вправо;
- указывается следующая инструкция.

Машина Тьюринга

Машина Тьюринга — это функция M такая, что для некоторого натурального числа n область определения этой функции есть подмножество множества $\{0, 1, \ldots, n\} \times \{0, 1\}$, а область значений есть подмножество множества $\{0, 1\} \times \{Л, П\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$.

Например, пусть $M(3, 1) = \langle 0, Л, 2 \rangle$.

Входные и выходные данные — это строчки из 1, разделенные 0.

Пусть <n> будет строчкой из 1 длины $n + 1$. Тогда <n_1> 0 <n_2> 0 … 0 <n_k> получена комбинацией k строчек из 1, каждая из которых отделена от другой 0.

Пусть $D_f \subseteq \boldsymbol{N}^k$ – область определения k-местной функции f: $D_f \to \boldsymbol{N}$.

Функция f называется **вычислимой по Тьюрингу**, если существует машина Тьюринга M такая, что как только M начинает с инструкции q_0, обозревая самый левый символ строки

$$<n_1> 0 <n_2> 0 \dots 0 <n_k>$$

(вся остальная часть ленты пуста), тогда:

- если значение $f(n_1, n_2,\dots, n_k)$ определено, то M в конце концов остановится, обозревая самый левый символ строки $<f(n_1, n_2,\dots, n_k)>$, при этом часть, находящаяся справа от этой строки, пустая;
- если значение $f(n_1, n_2,\dots, n_k)$ не определено, то M никогда не остановится.

Пример

<table>
<tr><th>Инструкции</th><th>Номер инструкции</th><th>Текущая строка символов</th><th>Комментарий</th></tr>
<tr><td rowspan="13">$M(0, 1) = <1, П, 0>$;
$M(0, 0) = <1, П, 1>$;
$M(1, 1) = <1, П, 1>$;
$M(1, 0) = <0, Л, 2>$;
$M(2, 1) = <0, Л, 3>$;
$M(3, 1) = <0, Л, 4>$;
$M(4, 1) = <1, Л, 4>$;
$M(4, 0) = <0, П, 5>$.

1 + 1 = ?</td><td>0</td><td>0110110</td><td rowspan="2">Прохождение через первое слагаемое</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0110110</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0110110</td><td>Заполнение промежутка</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0111110</td><td rowspan="2">Прохождение через второе слагаемое</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0111110</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0111110</td><td>Конец второго слагаемого</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0111110</td><td>Стирание 1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0111100</td><td>Стирание второй 1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0111000</td><td rowspan="3">Движение назад</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0111000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0111000</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0111000</td><td rowspan="2">Остановка</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0111000</td></tr>
</table>

Благодарю за внимание!