ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Модуль 6.4. Компьютерные доказательства

Зюзьков Валентин Михайлович

Лучший способ в чём-то разобраться до конца — это попробовать научить этому компьютер.

Дональд Кнут

Великие вычислители

- Леонардо Эйлер (1707 – 1783 гг.) – мастер формальных выкладок и преобразований.
- Урбен Леверье (1811 – 1877 гг.) – громоздкие расчеты орбиты Нептуна.
- Чарльз–Евгений Делоне (1816 – 1872 гг.) – вычисление орбиты Луны (10 + 10 лет работы, 40 000 формул).
- Вильям Шенкс (1812 – 1882 гг.) – вычисление числа π – 15 лет, 707 цифр.

Система компьютерной алгебры (computer algebra system) — программа для выполнения символьных (математических) вычислений.

Mathematica – система компьютерной алгебры, используется во многих научных, инженерных, математических и вычислительных областях; язык программирования – Wolfram.

В настоящее время развивается экспериментальная математика: открытие новых математических закономерностей путем компьютерной обработки большого числа примеров.

Книги Пойа Д.

- Математика и правдоподобные рассуждения.
- Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание.

Как использовать компьютеры в экспериментальной математике?

- Компьютеры помогают получить неформальные аргументы в пользу того или иного предположения.
- Компьютеры помогают опровергнуть казавшиеся правдоподобными гипотезы.
- Компьютерные вычисления также поставляют первичную информацию, позволяющую обнаруживать новые свойства изучаемых объектов и выдвинуть новые гипотезы.

Мы рассматривали задачу об определении числа R_n областей, образуемых хордами, которые соединяют n фиксированных точек на окружности, при предположении, что никакие три хорды не пересекаются внутри круга.

Эмпирически было установлены значения R_n для $n = 1, 2, \ldots, 6$ – это числа 1, 2, 4, 8, 16, 31. Mathematica может определить закономерность этой последовательности:

```
FindSequenceFunction[{1, 2, 4, 8, 16, 31}, n]
```

$$\frac{1}{24}\left(24 - 18n + 23n^2 - 6n^3 + n^4\right).$$

Созданы системы, предназначенные для автоматического и полуавтоматического, т. е. интерактивного, доказательства теорем.

Для этих систем появилось специфическое название theorem prover (система поиска вывода, «прувер»).

Пруверы делятся на два класса:

- автоматические (automated theorem prover), которые ищут доказательства совершенно независимо от человека;
- интерактивные (proof-assistant = interactive theorem prover), которые взаимодействуют с человеком.

Получены **полностью формализованные** доказательства знаменитых математических результатов:

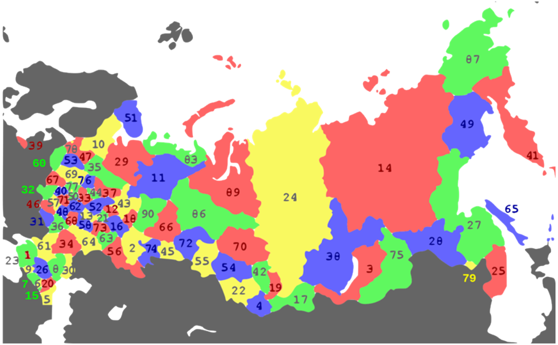
- 2005 г. Теорема Жордана о кривой.

Если J – простая замкнутая кривая в $\mathbf{R}^2$, то $\mathbf{R}^2 \setminus J$ имеет две компоненты («внутреннюю» и «внешнюю») с J в качестве общей границы.

- 1986 г. и 2003 г. Теорема Геделя о неполноте.
- 2005 г. и 2009 г. Теорема о распределении простых чисел.

Теорема о четырех красках

Каждую карту на плоскости можно раскрасить правильным образом в четыре цвета.



Гипотезу высказал один любитель математики по фамилии Гутри в 1852 г.

Первое доказательство этой гипотезы было получено с помощью компьютеров американскими математиками Аппелем и Хакеном в 1976 г.

Аппель и Хакен свели доказательство этого результата к перебору более 1476 различных графов и проверке для них некоторого условия на компьютере.

Найти ошибку в человеческом доказательстве — это серьезная проблема современной математики.

В 2004 г. с помощью компьютера была проверена как содержательная часть доказательства теоремы о четырех красках и сведение к перебору, так и формально доказана корректность алгоритма той программы, которая осуществляла перебор.

Благодарю за внимание!