ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Модуль 6.3. Различные виды доказательств в математике

Зюзьков Валентин Михайлович

Неформальное доказательство

Простота: каждый шаг «кажется правильным», даже если мы не знаем точно, почему.

Сложность: сложность системы, на которую доказательство опирается, а именно, человеческого языка.

Формальное доказательство (логический вывод)

Простота: каждый из многочисленных его шагов так прост, что сомнения в правильности этих шагов не возникают.

Сложность: грандиозная длина вывода, нельзя понять идею доказательства.

Доказательство – конструкция, синтаксическая правильность которой гарантирует семантическую (Н. Н. Непейвода).

Прямое доказательство – поиск аргументов, из которых по логическим правилам получается заключение.

Непрямое (косвенное) доказательство достигается посредством опровержения некоторых других высказываний, несовместимых с доказываемым.

Виды доказательств

1. Аксиоматический метод:

- неформальный;
- формальный.

Виды доказательств

2. Доказательство методом перебора.

Применяют, когда количество вариантов незначительно для проверки данного утверждения, например, утверждения о каком-то свойстве натуральных чисел в ограниченном диапазоне.

Используя системы компьютерной алгебры, проверка может быть проделана для очень больших чисел.

Виды доказательств

3. Использование теоремы о дедукции.

Если $A \vdash B$, то $\vdash A \supset B$.

Для того чтобы доказать утверждение «Если *A*, то *B*» предполагают, что справедливо *A* и доказывают справедливость *B*.

Виды доказательств

4. Доказательство импликаций с помощью контрапозиции.

Основывается на логической эквивалентности $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$.

Виды доказательств

5. Доказательство с помощью противоречия (от противного).

Теорема (школа Пифагора). Докажем, что диагональ единичного квадрата является иррациональным числом.

Доказательство. От противного. Пусть $\sqrt{2} = a/b$, где дробь a/b уже несократима. Имеем $a^2 = 2b^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2$ – четное число $\Rightarrow a$ – четное число $\Rightarrow$
$\Rightarrow a = 2t \Rightarrow 4t = 2b^2 \Rightarrow 2t = b^2 \Rightarrow b^2$ – четное число $\Rightarrow$
$\Rightarrow b$ – четное число $\Rightarrow a$ и b имеют общий делитель 2, что противоречит несократимости дроби a/b. Поэтому равенство $\sqrt{2} = a/b$ невозможно.

Теорема (Евклида). Доказать, что простых чисел бесконечно много.

Доказательство. Предположим, что существует конечное множество простых чисел и p есть наибольшее из них: $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, p$.

Определим число $N = p! + 1$.

Число N при делении на любое из чисел $k \le p$ дает в остатке 1.

Каждое число, которое не является простым, делится по крайней мере на одно простое число.

Число N не делится ни на одно простое число, следовательно, N – само простое число, причем $N > p$.

Таким образом, мы пришли к **противоречию**, которое доказывает, что **простых чисел бесконечно много**.

Виды доказательств

6. Доказательство контрпримером.

Многие математические гипотезы имеют в своей основе форму: «Все объекты со свойством A обладают свойством B».

Мы можем записать это в виде формулы $\forall x \; (A(x) \supset B(x))$, где $A(x)$ обозначает предикат «x обладает свойством A», $B(x)$ – «x обладает свойством B».

Однако для доказательства ложности гипотезы достаточно привести хотя бы один пример (называемый в этом случае контрпримером), для которого гипотеза невыполнима.

Пример контрпримера

Ферма предполагал, что все числа вида $p_k = 2^{2^k} + 1$ простые. Первые пять чисел для $k = 0, 1, 2, 3, 4$ являются простыми. Он не смог проверить число $p_5 = 4\ 294\ 967\ 297$.

Число $p_5 = 641 \times 6\ 700\ 417$ было разложено на множители Эйлером.

Виды доказательств

7. Метод математической индукции.

ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Благодарю за внимание!