ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Модуль 6.2. Математическая индукция

Зюзьков Валентин Михайлович

Математическая индукция

Пусть $P(n)$ – свойство натуральных чисел, выразимых в теории элементарной арифметики.

Если

1) выполнено $P(0)$ и
2) для каждого $k \geq 0$ из $P(k)$ следует $P(k+1)$,

то для каждого $n \geq 0$ справедливо $P(n)$.

Аксиома математической индукции в стандартной интерпретации элементарной арифметики выражается формулой:

$$(P(0) \,\&\, \forall x(P(x) \supset P(x+1))) \supset \forall n P(n).$$

Докажем $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Пусть $P(n)$ обозначает данное равенство. Очевидно, базис индукции выполнен, $0^2 = (0 \times 1 \times 1)/6 = 0$. Докажем индуктивный переход от $P(n)$ к $P(n+1)$: добавим к обеим частям равенства слагаемое $(n+1)^2$. Тогда слева будет сумма первых $n+1$ квадратов, а справа получаем

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Задача. Пусть дана последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8,… чисел Фибоначчи $f(n)$. Докажите формулу Кассини
$f(n+1)\,f(n-1) - f(n)^2 = (-1)^n$ при $n > 1$.

Решение. Определим $P(n)$ как $f(n+1)\,f(n-1) - f(n)^2 = (-1)^n$ при $n > 1$.
Базис индукции выполняется для $n = 2$: $f(3)\,f(1) - f(2)^2 = (-1)^2$.
Шаг индукции.
Пусть для $k \geq 2$ выполнено $P(k)$: $f(k+1)\,f(k-1) - f(k)^2 = (-1)^k$.

Докажем $P(k+1)$. Имеем $f(k+2)\,f(k) = (f(k+1) + f(k))\,f(k) =$
$= f(k+1)\,f(k) + f(k)^2 = f(k+1)\,f(k) + f(k+1)\,f(k-1) - (-1)^k$
(в силу $P(k)$) $= f(k+1)(f(k) + f(k-1)) - (-1)^k =$
$= f(k+1)\,f(k+1) - (-1)^k = f(k+1)^2 - (-1)^k$.

Отсюда получаем $f(k+2)\,f(k) = f(k+1)^2 + (-1)^{k+1}$,
т. е. $f(k+2)\,f(k) - f(k+1)^2 = (-1)^{k+1}$.

По принципу математической индукции имеем
$f(n+1)\,f(n-1) - f(n)^2 = (-1)^n$ при $n > 1$.

Пример 1

Пусть $P(n)$ есть $\sum_{i=0}^{n}(2i-1)=n^2+5$.

Тогда $P(0)$ ложно, но из $P(n)$ следует $P(n+1)$.
И $P(n)$ ложно для всех натуральных чисел.

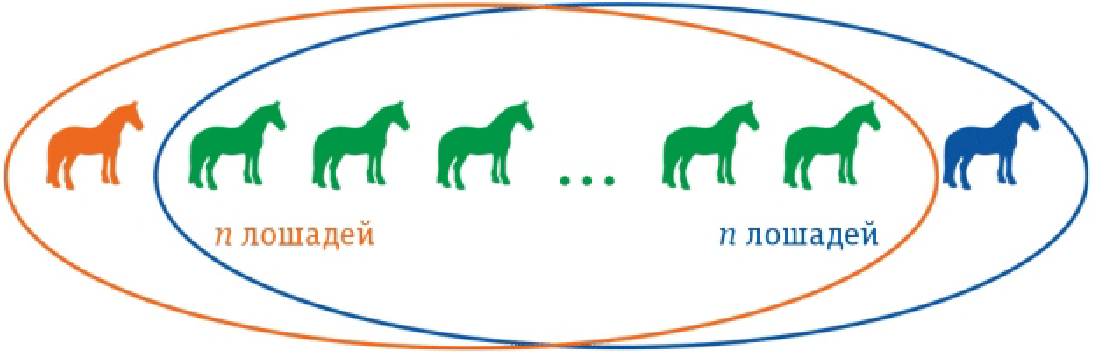
Пример 2

Для любого натурального n число
$n^2 + 5n + 1$ – четное.

Хотя легко доказать, что индуктивный шаг из четности $n^2 + 5n + 1$ выводит четность $(n + 1)^2 + 5(n + 1) + 1$, но верности одного индуктивного перехода недостаточно.

Софизм. Все лошади одной масти

То, что все лошади одной масти, можно доказать индукцией по числу лошадей в определенном табуне.



ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Благодарю за внимание!