



Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 5. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Модуль 5.5. Примеры формальных аксиоматических теорий

Зюзьков Валентин Михайлович

Аксиоматизация геометрии

«Начала» Евклида не были достаточно последовательными с точки зрения воплощения даже неформального аксиоматического метода.

Аксиома о параллельности (пятый постулат)

В плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.

Отрицание аксиомы о параллельности

Через точку, взятую вне данной прямой,
можно провести более одной прямой,
параллельной данной.

Математики, обнаружившие существование альтернативной геометрии:

- Николай Лобачевский (доклад – 1826 г., публикация – 1829 г.);
- Янош Бойяи (письмо – 1831 г., публикация – 1832 г.);
- Карл Гаусс (только черновые заметки).

Конец XIX века: доказано, что геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива евклидова геометрия.

Первая последовательная и полная аксиоматическая теория для евклидовой геометрии была создана Давидом Гильбертом в самом конце XIX века.

Неопределяемых понятий – 8.
Аксиом – 24.

Аксиоматика Гильберта непротиворечива, если непротиворечива элементарная арифметика.

Аксиоматика Пеано

Собственные аксиомы теории элементарной арифметики суть формулы следующих видов:

$P_1: (P(\mathbf{0}) \ \& \ \forall x(P(x) \supset P(S(x)))) \supset \forall zP(z)$ –
принцип математической индукции,
 P – произвольная формула;

$P_2: S(t_1) = S(t_2) \supset t_1 = t_2;$

$P_3: \neg(S(t) = \mathbf{0});$

$P_4: t + \mathbf{0} = t;$

$P_5: t_1 + S(t_2) = S(t_1 + t_2);$

$P_6: \mathbf{0} \times t = \mathbf{0};$

$P_7: S(t_1) \times t_2 = t_1 \times t_2 + t_2.$

Следующее утверждение является эмпирически установленным фактом: все рассуждения обычной (интуитивной) теории чисел, которые не апеллируют к произвольным действительным числам и функциям, могут быть формально воспроизведены в теории элементарной арифметики.

Благодарю за внимание!