ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 5. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Модуль 5.4. Теории первого порядка

Зюзьков Валентин Михайлович

Теорией первого порядка называется теория с языком первого порядка.

Аксиомы теории первого порядка разбиваются на два класса: логические аксиомы (вместе с аксиомами равенства) и собственные (или нелогические).

Логические аксиомы

Каковы бы ни были формулы A, B и C теории $\boldsymbol{T}$, следующие формулы являются логическими аксиомами теории $\boldsymbol{T}$:

A_1: $A \supset (B \supset A)$.

A_2: $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.

A_3: $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.

A_4: $\forall x A(x) \supset A(t)$, где $A(t)$ есть формула теории $\boldsymbol{T}$.

A_5: $\forall x (A \supset B(x)) \supset (A \supset \forall x B(x))$, где A не содержит свободных вхождений переменной x.

Аксиомы равенства

A_6: $t_1 = t_1$.

A_7: $t_1 = t_2 \supset t_2 = t_1$.

A_8: $t_1 = t_2 \,\&\, t_2 = t_3 \supset t_1 = t_3$.

A_9: $t_1 = s_1 \,\&\, \ldots \,\&\, t_n = s_n \supset f(t_1,\ldots, t_n) =$
$= f(s_1,\ldots, s_n)$.

A_{10}: $t_1 = s_1 \,\&\, \ldots \,\&\, t_n = s_n \supset P(t_1,\ldots, t_n) \equiv$
$\equiv P(s_1,\ldots, s_n)$.

В этих аксиомах $t_1,\ldots, t_n$, $s_1,\ldots, s_n$ – любые термы, f – любой n-местный функциональный символ из языка, P – любой n-местный предикатный символ из языка.

Собственные аксиомы не могут быть сформулированы в общем случае, ибо меняются от теории к теории.

Правилами вывода во всякой теории первого порядка являются:

- modus ponens: $\dfrac{A, A \supset B}{B} MP;$
- правило обобщения: $\dfrac{A(x)}{\forall x A(x)} Gen.$

Формула B называется непосредственным следствием формул A, $A \supset B$ по правилу modus ponens.

Формула $\forall x A\,(x)$ называется непосредственным следствием формулы $A(x)$ по правилу обобщения.

Теория первого порядка, которая не содержит собственных аксиом, называется исчислением предикатов первого порядка.

Чистым исчислением предикатов называется исчисление предикатов первого порядка, не содержащее предметных констант и функциональных констант.

Язык Пролог — пример использования языка логики предикатов первого порядка в качестве языка программирования.

Суть идеи логического программирования заключается в том, чтобы программист описывал на логическом языке свойства интересующей его области, иначе говоря, описывал мир своей задачи. Другие свойства и удовлетворяющие им объекты машина находила бы сама путем построения логического вывода.

Теорема

Если теория первого порядка противоречива, то в ней выводима любая формула.

Доказательство.

Пусть формулы A и $\neg A$ выводимы в теории.

Формула $\neg A \supset (A \supset B)$ является тавтологией в исчислении высказываний, следовательно, она выводима.

Её вывод, поскольку он содержит только MP, остается выводом и в любой теории первого порядка.

Поэтому формула $\neg A \supset (A \supset B)$ выводима в теории первого порядка.

Дважды применяя MP, мы получаем вывод произвольной формулы B.

Теорема

В исчислении предикатов любая доказуемая формула является общезначимой.

Теорема (Гёделя о полноте)

В исчислении предикатов доказуемы все общезначимые формулы и только они.

Теорема (Чёрча)

Исчисление предикатов неразрешимо.

ТУСУР TUSUR UNIVERSITY

Благодарю за внимание!