ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 5. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Модуль 5.3. Исчисление высказываний

Зюзьков Валентин Михайлович

Исчисление высказываний

Исчислением высказываний называется формальная теория с языком логики высказываний, со схемами аксиом

A_1: $A \supset (B \supset A)$;

A_2: $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;

A_3: $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$

и правилом вывода *MP* (*Modus Ponens* – обычно переводится как **правило отделения**):

$$\frac{A, A \supset B}{B} MP.$$

Пример

Докажем, что $A \supset A$ – теорема.

Подставляем в схему аксиом A_2 вместо B формулу $A \supset A$ и вместо C формулу A, получаем аксиому

$$(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)). \quad (1)$$

Подставляем в A_1 вместо формулы B формулу $A \supset A$, получаем аксиому

$$A \supset ((A \supset A) \supset A). \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) по правилу MP получаем

$$(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A). \quad (3)$$

Подставляем в A_1 вместо формулы B формулу A, получаем аксиому

$$A \supset (A \supset A). \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) по правилу MP получаем $A \supset A$.

Теорема

1. Любая аксиома в исчислении высказываний является тавтологией.
2. Любая теорема в исчислении высказываний является тавтологией.

Теорема (Поста, 1921)

Формула A в исчислении высказываний является теоремой тогда и только тогда, когда A – тавтология.

Формальная теория называется **полной** (относительно данной интерпретации), если любая формула теории истинна тогда и только тогда, когда она доказуема.

Формальная теория называется **разрешимой**, если существует алгоритм, который для любой формулы теории определяет, является ли эта формула теоремой теории.

Теорема

Исчисление высказываний – полная, разрешимая и непротиворечивая теория.

Благодарю за внимание!