ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 5. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Модуль 5.2. Формальные аксиоматические теории

Зюзьков Валентин Михайлович

Формальная теория T считается определенной, если:

- задано некоторое множество A символов – символов теории T; конечные последовательности символов теории T называются **выражениями** теории T (множество выражений обозначают через A^*);
- имеется подмножество $F \subset A^*$ выражений теории T, называемых **формулами** теории T;
- выделено некоторое множество $B \subset F$ формул, называемых **аксиомами** теории T;
- имеется конечное множество $\{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ отношений между формулами, называемых **правилами вывода**. Правила вывода позволяют получать из некоторого конечного множества формул новую формулу.

Выводимость

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, A$ – формулы теории $\boldsymbol{T}$. Если существует такое правило вывода R, что $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n, A\rangle \in R$, то говорят, что формула A непосредственно выводима из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ по правилу вывода R:

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{A} R,$$

где формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются посылками, а формула A – заключением.

Вывод формулы

Выводом формулы A из множества формул Γ в теории $\boldsymbol{T}$ называется такая последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$, что $A = F_k$, а любая формула F_i $(i < k)$ является:

- либо аксиомой,
- либо $F_i \in \Gamma$,
- либо непосредственно выводимой из ранее полученных формул $F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_n}$ $(j_1, \ldots, j_n < i)$.

Вывод формулы

Если в теории $\boldsymbol{T}$ существует вывод формулы A из множества формул Γ, то это записывается следующим образом:

$$\Gamma \mid\!- A,$$

где формулы из Γ называются гипотезами вывода, а формула A – выводимой из множества Γ.

Если множество Γ конечно: $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, то вместо $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \mid\!- A$ пишут

$$B_1, B_2, \ldots, B_n \mid\!- A.$$

Если Γ есть пустое множество $\varnothing$, то A называют теоремой (или доказуемой формулой) и в этом случае используют сокращенную запись $\mid\!- A$ («A есть теорема»).

Пример формальной теории L с дедуктивной системой

Формулами в теории L являются всевозможные строки, составленные из букв a и b, например a, aa, aba, $abaab$.

Единственной аксиомой L является строка a, наконец, в L имеется два правила вывода:

$$\frac{X}{Xb} \quad \text{и} \quad \frac{X}{aXa}.$$

Такая запись означает, что в теории L из строки X непосредственно выводятся Xb и aXa. Примером теоремы L является строка $aababb$; вывод (доказательство) для нее есть

$$a,\ ab,\ aaba,\ aabab,\ aababb.$$

Если в аксиоматической теории вводят семантическую и дедуктивную системы, то это делают таким образом, чтобы доказуемые формулы были истинными.

В этом случае говорят, что дедуктивная система корректна относительно семантической системы.

Моделью теории называется такая интерпретация, в которой истинны все теоремы теории (для этого достаточно, чтобы были истинны все аксиомы теории).

Формальная теория T с языком первого порядка называется **противоречивой**, если существует формула A, доказуемая вместе со своим отрицанием $\neg A$.

При изучении аксиоматических теорий нужно различать теоремы аксиоматической теории и теоремы об аксиоматической теории, или метатеоремы.

Пример

Можно доказать следующее утверждение, относящееся ко всем теоремам L:
если X – теорема, то aaX – тоже теорема.

Благодарю за внимание!