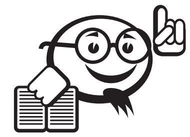
Модуль 7.4. Некоторые алгоритмически неразрешимые проблемы

Решение вопроса о том, обладают ли натуральные числа данным свойством, является часто встречающейся задачей математики. Поскольку свойства чисел можно выразить с помощью подходящего предиката, то решение задачи сводится к выяснению того, является ли данный предикат ***разрешимым*** или нет (т. е. существует ли алгоритм, который позволил бы распознать, является ли предикат истинным или ложным; см. параграф 5.1 главы 5). Задачи с произвольными универсумами во многих случаях можно переформулировать в виде задач с натуральными числами, если использовать подходящее кодирование. В контексте разрешимости предикаты часто называются ***проблемами***.

Имея точное определение вычислимости, удалось доказать, что некоторые проблемы неразрешимы. Как мы уже знаем (глава 6, теорема 11), Алонзо Чёрч доказал, что не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.



Теорема 2. Проблема остановки неразрешима.

Этот результат, доказанный впервые независимо друг от друга Тьюрингом (используя машины Тьюринга) и Чёрчем (с помощью лямбда-исчисления) точно формулируется в следующем виде.

Не существует никакого общего алгоритма, позволяющего установить, остановится ли некоторая конкретная программа (на любом языке программирования), запущенная после введения в неё некоторого конкретного набора данных. Смысл этого утверждения для теоретического программирования очевиден: не существует совершенно общего метода проверки программ на наличие в них бесконечных циклов.

С использованием аналогичных идей получены и следующие результаты о неразрешимости. Не существует никакого общего алгоритма, позволяющего установить, вычисляет ли некоторая конкретная программа (на любом языке программирования) постоянную нулевую функцию [1, с. 110]. То же самое справедливо и для любой другой конкретной вычислимой функции. И как следствие, можно утверждать, что вопрос о том, вычисляют ли две данные программы одну и ту же одноместную функцию, также неразрешим. Тем самым получаем, что в области тестирования компьютерных программ мы имеем принципиальные ограничения.

Диофантовы уравнения

Пусть $p(z_1, \ldots, z_n)$ — полином с целыми коэффициентами типа

$$p(z_1, z_2) = z_1^5 - 4z_1z_2^3 + 32.$$

Диофантовы уравнения $p(z_1, \ldots, z_n) = 0$ подразумевают решение в целых числах. Первым диофантовые уравнения систематизировал и изучил греческий математик Диофант в третьем веке нашей эры. Ниже приводится пример системы диофантовых уравнений:

$$\begin{cases} 6w + 2x^2 - y^3 = 0, \\ 5xy - z^2 + 6 = 0, \\ w^2 - w + 2x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

Вот еще один пример:

$$\begin{cases} 6w + 2x^2 - y^3 = 0, \\ 5xy - z^2 + 6 = 0, \\ w^2 - w + 2x - y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является, в частности, следующее:

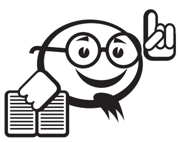
$$w = 1,\ x = 1,\ y = 2,\ z = 4,$$

тогда как вторая система вообще не имеет решения. В самом деле, судя по первому уравнению, число y должно быть четным, судя по второму уравнению, число z также должно быть четным, однако это противоречит третьему уравнению, причем при любом w, поскольку значение разности $w^2 - w$ — это всегда четное число, а число 3 нечетно.

Со времени Диофанта специалисты по теории чисел нашли решения огромного количества диофантовых уравнений и установили отсутствие решений у массы других уравнений, однако при этом для разных классов уравнений или даже отдельных уравнений приходилось изобретать свой особый метод.

В 1900 году на Парижском международном математическом конгрессе Давид Гильберт выступил с докладом, в котором перечислил 23 наиболее сложные, по его мнению, не решенные на тот момент математические проблемы. В 10-й проблеме предлагалось найти универсальный метод для распознавания разрешимости диофантовых уравнений.

После 20-летних усилий многих математиков советский математик Ю. Матиясевич в 1970 году доказал:



Теорема 3 (отрицательное решение 10-й проблемы Гильберта). Существует такой полином $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, что неразрешимость уравнения

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k) - y = 0$$

по $x_1, x_2, \ldots, x_k$ при любом положительном y алгоритмически непроверяема.

Для таких полиномов можно указать следующие значения (суммарной) степени n и числа m переменных x: ($n = 9$, $m \approx 1{,}6 \cdot 10^{45}$), (58,4), (38,2), (32,12), (24,36), (19,2668).

Список литературы по модулю

[1] Катленд Н. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций : пер. с англ. / Н. Катленд. — М. : Мир, 1983. — 256 с.