Модуль 6.2. Математическая индукция

Математическая индукция является приемом доказательства, часто полезным для подтверждения математических предположений, к которому мы пришли с помощью некоторого процесса индукции.

В книге [1] Д. Пойа[1] (рис. 1) рассказывает, как с помощи индукции можно найти формулу для суммы n первых квадратов

$$1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2.$$

Он сравнивает эту сумму с суммой первых n натуральных чисел с известной формулой

Рис. 1 – Дьердь Пойа

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \left[n \cdot (n+1)\right] \Big/ 2.$$

Он говорит о том, что естественно попытаться обнаружить какого-то рода параллелизм между этими двумя суммами и рассмотреть их совместно:

n	1	2	3	4	5	6	…
$1 + 2 + 3 + \ldots + n$	1	3	6	10	15	21	…
$1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$	1	5	14	30	55	91	…

Далее он пишет:

«Как связаны две последние строки? Нам может прийти в голову идея исследовать их отношение:

n	1	2	3	4	5	6	…
$\dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n}$	1	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{7}{3}$	3	$\dfrac{11}{3}$	$\dfrac{13}{3}$	…

Здесь правило очевидно, и если отношение во второй строке записать следующим образом:

$$\frac{3}{3} \;\; \frac{5}{3} \;\; \frac{7}{3} \;\; \frac{9}{3} \;\; \frac{11}{3} \;\; \frac{13}{3},$$

его почти невозможно не заметить. Едва ли мы сможем удержаться и не сформулировать предположение, что

$$\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + n} = \frac{2n+1}{3}.$$

Пользуясь значением знаменателя в левой части, которое мы считаем известным, можем высказать наше предположение в форме

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}.$$

---

[1] Дьёрдь Пойа (англ. *George Polya* — Джордж Полиа; 1887–1985 гг.) — венгерский и американский математик с мировым именем. Основные результаты — в теории чисел, функциональном анализе, математической статистике и комбинаторике. Знамениты его книги о том, как решать задачи и как надо учить решать задачи.

Верно ли это? То есть, всегда ли это верно?»

Далее Д. Пойя дополнительно проверяет эту формулу, в частности, получает неоспоримое следствие из предполагаемой формулы, что серьезно подтверждает его догадку. И наконец, приводит следующее доказательство.

«Предположительно верно, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}.$$

Неоспоримо верно, что

$$(n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}.$$

Следовательно, верно, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

(мы сложили два предыдущих равенства). Это означает: если наше предположение верно для некоторого целого числа n, то оно непременно остается верно для следующего целого числа $n+1$.

Однако мы знаем, что предположение верно для $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Будучи верным для 7, оно должно быть верным и для следующего числа 8; будучи верным для 8, оно должно быть верно и для 9; так как оно верно для 9, оно верно и для 10, а значит, и для 11 и т. д. Предположение верно для всех целых чисел, нам удалось доказать его в полной общности».

Далее Д. Пойа показывает, что предыдущее рассуждение может быть упрощено, если воспользоваться важным методом доказательства, называемым «*математическая индукция*». При этом бесконечное множество переходов от фиксированного натурального числа n к следующему числу $n+1$ (признаком бесконечности служат слова «и т. д.») в доказательстве заменяется на одно общее рассуждение.

Приступим сейчас к рассмотрению разнообразных вариантов математической индукции. Современное развитие принципа математической индукции началось с аксиом Пеано для теории формальной арифметики ***EA***. Аксиома математической индукции (см. главу 5, параграф 5.5) в стандартной интерпретации ***EA*** выражается формулой:

$$\Big(P(0)\ \&\ \forall x\big(P(x) \supset P(x+1)\big)\Big) \supset \forall n P(n). \qquad (1)$$

Из аксиомы (1) следует предложение 1.

Предложение 1 (Принцип математической индукции). Пусть $P(n)$ — свойство натуральных чисел, выразимых в теории ***EA***.

Если

(1) выполнено $P(0)$ и

(2) для каждого $k \geqslant 0$ из $P(k)$ следует $P(k+1)$,

то для каждого $n \geqslant 0$ справедливо $P(n)$.

Доказательство. Из истинности формул $P(0)$ и $\forall x\big(P(x) \supset P(x+1)\big)$ в силу аксиомы (1) следует $\forall n P(n)$.

В математической индукции имеется ***индуктивный базис*** — утверждение, что свойство выполнено для самого маленького из рассматриваемых чисел, и ***индуктивный шаг*** — обоснование перехода от числа n к числу $n+1$.

Пример 1

Приведем с помощью математической индукции доказательство справедливости формулы для суммы квадратов

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}. \tag{2}$$

Пусть $P(n)$ обозначает равенство (2). Очевидно, базис индукции выполнен, $0^2 = (0 \times 1 \times 1)/6 = 0$. Докажем индуктивный переход от $P(n)$ к $P(n+1)$: добавим к обеим частям равенства (2) слагаемое $(n+1)^2$. Тогда слева будет сумма первых $n+1$ квадратов, а справа получаем

$$\frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

что и требовалось доказать.

Задача 1. Пусть дана последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8,… чисел Фибоначчи $f(n)$ (см. главу 1, параграф 1.3). Докажите формулу Кассини

$$f(n+1) \cdot f(n-1) - f(n)^2 = (-1)^n$$

при $n > 1$.

Решение. Определим $P(n)$ как $f(n+1) \cdot f(n-1) - f(n)^2 = (-1)^n$ при $n > 1$.

Базис индукции выполняется для $n = 2$: $f(3) \cdot f(1) - f(2)^2 = (-1)^2$.

Шаг индукции. Пусть для $k \geqslant 2$ выполнено $P(k)$: $f(k+1) \cdot f(k-1) - f(k)^2 = (-1)^k$. Докажем $P(k+1)$. Имеем

$$f(k+2) \cdot f(k) = \big(f(k+1) + f(k)\big) \cdot f(k) = f(k+1) \cdot f(k) + f(k)^2 =$$
$$= f(k+1) \cdot f(k) + f(k+1) \cdot f(k-1) - (-1)^k \ \big(\text{в силу } P(k)\big) =$$
$$= f(k+1) \cdot \big(f(k) + f(k-1)\big) - (-1)^k = f(k+1) \cdot f(k+1) - (-1)^k = f(k+1)^2 - (-1)^k.$$

Отсюда получаем $f(k+2) \cdot f(k) = f(k+1)^2 + (-1)^{k+1}$, т. е. $f(k+2) \cdot f(k) - f(k+1)^2 = (-1)^{k+1}$. По принципу математической индукции имеем $f(n+1) \cdot f(n-1) - f(n)^2 = (-1)^n$ при $n > 1$.

Формула Кассини объясняет софизм с числами Фибоначчи, рассмотренный в главе 1, параграф 1.3.

Выполнение базиса индукции необходимо для индуктивного доказательства.

Пример 2

Пусть $P(n)$ есть

$$\sum_{i=0}^{n}(2i-1) = n^2 + 5.$$

Тогда $P(0)$ ложно, а из $P(n)$ следует $P(n+1)$. И $P(n)$ ложно для всех натуральных чисел.

Пример 3

Для любого натурального n число n^2+5n+1 — четное. И в этом случае верности одного индуктивного перехода недостаточно.

Базис в математической индукции может быть любым натуральным числом.

Предложение 2. Принцип математической индукции с базисом, большим 0. Пусть $P(n)$ — свойство натуральных чисел, выразимых в теории ***EA***.

Если

(1) для некоторого $k \geqslant 0$ выполнено $P(k)$ и

(2) для каждого $m \geqslant k$ из $P(m)$ следует $P(m+1)$,

то для каждого $n \geqslant k$ справедливо $P(n)$.

Доказательство. Положим $T(n) = P(n+k)$. Тогда имеем

(1a) выполнено $T(0)$ и

(2a) для каждого $m \geqslant 0$ из $T(m)$ следует $T(m+1)$, и предложение 1 дает для каждого $n \geqslant 0$ истинность $T(n)$, что влечет справедливость $P(n)$ для всех $n \geqslant k$.

Предложение 3. Принцип математической индукции эквивалентен существованию наименьшего элемента в любом непустом подмножестве **N**.

Доказательство.

1. Пусть в любом непустом подмножестве $\mathbf{N}$ существует минимальный элемент. Докажем выполнимость принципа математической индукции. Пусть $P(n)$ — некоторое свойство натуральных чисел, для которого

(1) выполнено $P(0)$ и

(2) для каждого $k \geqslant 0$ из $P(k)$ следует $P(k+1)$.

Будем рассуждать от противного: множество $B = \{n \mid \neg P(n)\}$ не пусто. Тогда существует наименьший элемент $m \in B$. Так как $P(0)$, по базису индукции, — истина, то $m > 0$. Следовательно, $m - 1 \in \mathbf{N}$ и $P(m-1)$, поэтому по индуктивному переходу выполнено P для m. Но это противоречит $m \in B$, следовательно, B пусто. И поэтому для всех $n \geqslant 0$ справедливо $P(n)$.

2. Пусть справедлив принцип математической индукции и B — непустое подмножество $\mathbf{N}$. Докажем, что в B существует наименьший элемент. От противного: пусть в B нет наименьшего элемента. Определим предикат

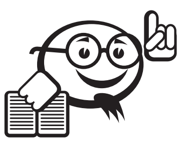
$$P(n) - «\forall m(m \leqslant n \supset m \notin B)».$$

Имеем $0 \notin B$, иначе 0 был бы наименьшим элементом в B. Поэтому выполнено $P(0)$ — базис индукции для $P(n)$. Покажем истинность индуктивного перехода. Пусть для k выполнено $P(k)$, т. е. для всех $m \leqslant k$ имеем $m \notin B$, в частности $k \notin B$. Отсюда следует, что $k+1 \notin B$, иначе $k+1$ был бы наименьшим элементом в B. Поскольку для всех $m \leqslant k+1$ выполнено $m \notin B$, то $P(k+1)$ — истина. Тем самым мы доказали верность индуктивного перехода и, по принципу математической индукции, получили, что для всех $n \geqslant 0$ справедливо $P(n)$. Последнее означает, что $B = \varnothing$. Полученное противоречие говорит о том, что B имеет наименьший элемент.

Возвратная индукция — один из вариантов математической индукции. Здесь индуктивный переход происходит не от одного значения к следующему, а от всех предыдущих значений к последующему; шаг индукции переводит не от $P(x)$ к $P(x+1)$, а от $P(y)$ для всех $y < x$ к $P(x)$. При таком переходе не требуется базиса индукции. В самом деле, поскольку условие $x < 0$ тождественно ложно, то, поскольку из лжи следует все, что угодно, имеем

$$\forall x\big(x < 0 \supset P(x)\big),$$

а отсюда по индуктивному переходу имеем $P(0)$.



Предложение 4. Возвратная индукция. Пусть $P(n)$ — свойство натуральных чисел, выразимых в теории ***EA***.

Если для всех x утверждение $\forall y\big(y < x \supset P(y)\big)$ влечет $P(x)$, то для каждого $n \geqslant 0$ справедливо $P(n)$.

Еще одна переформулировка метода математической индукции.

Предложение 5. Принцип бесконечного спуска. Пусть $P(n)$ — свойство натуральных чисел, выразимых в теории $\boldsymbol{EA}$.

Если для каждого натурального числа, удовлетворяющего свойству $P(n)$, найдется меньшее, удовлетворяющее этому же свойству, то чисел n, для которых выполнено $P(n)$, вообще нет.

Формально:

$$\forall n\Big(P(n) \supset \exists m\big(m < n \mathbin{\&} P(m)\big)\Big) \supset \forall n \neg P(n).$$

Теорема 1. Следующие пять свойств множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел эквивалентны:

(a) принцип математической индукции (предложение 1);

(b) любое непустое подмножество $\mathbf{N}$ имеет наименьший элемент;

(c) всякая строго убывающая последовательность натуральных чисел конечна;

(d) возвратная индукция (предложение 4);

(e) принцип бесконечного спуска (предложение 5).

Доказательство.

$(a) \Leftrightarrow (b)$: эквивалентность (a) и (b) доказана в предложении 3.

$(b) \Leftrightarrow (c)$: если $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ — бесконечная убывающая последовательность, то, очевидно, множество ее значений не имеет наименьшего элемента (для каждого элемента следующий еще меньше). Поэтому из (b) следует (c). Напротив, если B — непустое множество, не имеющее наименьшего элемента, то бесконечную убывающую последовательность можно построить так. Возьмем произвольный элемент $b_0 \in B$. По предположению, он не является наименьшим, так что можно найти $b_1 \in B$, для которого $b_0 > b_1$. По тем же причинам можно найти $b_2 \in B$, для которого $b_1 > b_2$, и т. д. Получается бесконечная убывающая последовательность.

$(b) \Leftrightarrow (d)$: выведем метод возвратной индукции из существования наименьшего элемента в любом подмножестве. Пусть $P(n)$ — свойство натуральных чисел, для которого справедливо утверждение индуктивного перехода

$$\text{«для всех } x \text{ утверждение } \forall y\big(y < x \supset P(y)\big) \text{ влечет } P(x)\text{».} \tag{3}$$

Рассуждаем от противного: пусть $P(n)$ справедливо не для всех n. Рассмотрим непустое множество B тех элементов, для которых свойство P неверно. Пусть x — наименьший элемент множества B. По условию меньших элементов во множестве B нет, поэтому для всех $y < x$ свойство $P(y)$ выполнено. Но тогда в силу (3) должно быть выполнено и $P(x)$, что противоречит $x \in B$. Следовательно, $P(n)$ справедливо для всех n.

Докажем существование наименьшего элемента в любом непустом множестве с помощью возвратной индукции. Пусть B — множество, в котором нет наименьшего элемента. Докажем по индукции, что B пусто; для этого в качестве $P(x)$ возьмем свойство $x \notin B$. В самом деле, если $P(y)$ верно для всех $y < x$, то никакой элемент, меньший x, не лежит в B. Значит, если бы x лежал в B, то он бы был там минимальным, а таких нет. Полученное противоречие доказывает существование минимального элемента в любом непустом множестве.

$(c) \Leftrightarrow (e)$: если бы некоторая убывающая последовательность натуральных чисел была бы бесконечна, то это противоречило бы принципу бесконечного спуска. Теперь выведем принцип бесконечного спуска из конечности убывающих последовательностей. Если бы для каждого n_k, удовлетворяющего свойству $P(n_k)$, нашлось бы меньшее его n_{k+1}, удовлетворяющее этому же свойству, то получившаяся последовательность была бы бесконечно убывающей, чего не может быть. Таким образом, от противного обоснован принцип бесконечного спуска.

Проиллюстрируем применение принципа бесконечного спуска.

Задача 2. Пусть k — натуральное число, и $\sqrt{k}$ — не целое. Докажите, что $\sqrt{k}$ — иррациональное число.

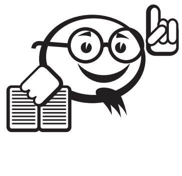
Решение. Предположим, что можно представить $\sqrt{k}$ в виде отношения натуральных чисел m и n. Обозначим через q наибольшее натуральное число, не превосходящее $\sqrt{k}$. Имеем равенства

$$\sqrt{k} = \frac{m}{n} = \frac{m(\sqrt{k} - q)}{n(\sqrt{k} - q)} = \frac{m\sqrt{k} - mq}{n\sqrt{k} - nq} = \frac{nk - mq}{m - nq} = \frac{m'}{n'}.$$

Перед последним равенством первое m в числителе заменили произведением $n\sqrt{k}$, а $\sqrt{k}$ заменили отношением m/n.

Мы получили из дроби m/n равную ей новую дробь m'/n', причем $m' < m$ и $n' < n$ (исходные числитель и знаменатель умножили на число меньшее 1 и упростили независимо так, чтобы снова получились целые числа). С новой дробью m'/n' мы можем повторить подобное преобразование и получим дробь с еще меньшими числителями и знаменателями и т. д. По принципу бесконечного спуска следует, что таких чисел m и n вообще нет.

При доказательстве основной теоремы арифметики обычно используется возвратная индукция.



Теорема 2. Основная теорема арифметики. Всякое натуральное число, большее 1, единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разложимо в произведение простых чисел.

Доказательство.

1. Сначала докажем, что натуральное число, большее 1, разложимо на простые множители. Пусть $P(n)$ есть утверждение «n — произведение простых чисел».

Индуктивный шаг. Возьмем некоторое $m \geqslant 2$ и допустим, что для каждого k, удовлетворяющего неравенству $2 \leqslant k < m$, утверждение $P(k)$ истинно. Если m — простое число, то $P(m)$ — истина. Если m — составное число, то существуют r и s, для которых выполнено $2 \leqslant r < m$, $2 \leqslant s < m$ и $r \cdot s = m$. Так как $P(r)$ и $P(s)$ выполнено, то r и s — произведения простых чисел. Поэтому $r \cdot s$ есть произведение простых чисел. В силу возвратной индукции, мы получаем, что любое n разложимо в произведение простых чисел.

2. Покажем единственность разложения, следуя [2, с. 17–18]. Пусть $S(n)$ утверждает, что n имеет единственное представление (с точностью до порядка сомножителей) в виде произведения простых чисел. Возьмем некоторое $m \geqslant 2$ и допустим, что для каждого k, удовлетворяющего неравенству $2 \leqslant k < m$, утверждение $S(k)$ истинно. Если m — простое число, то $S(m)$ — истина. Предположим, что m — составное и имеется два различных представления m в виде произведения простых, скажем,

$$m = pqr\ldots = p'q'r'\ldots,$$

где $p, q, r, \ldots$ и $p', q', r', \ldots$ — простые. Одно и тоже простое число не может встретиться в двух разложениях, так в этом случае мы сократили бы на это простое и получили бы два различных разложения меньшего числа, а это противоречит индуктивному предположению.

Не нарушая общности, можно предполагать, что p — наименьшее из простых, встречающихся в первом разложении. Так как m — составное, имеется по меньшей мере один множитель в разложении, помимо p; поэтому $m \geqslant p^2$. Аналогично $m \geqslant p'^2$. Так как p и p' не одинаковы, то по крайней мере одно из этих неравенств строгое и, следовательно, $pp' < m$. Рассмотрим теперь число $m - pp'$. Это натуральное число меньше m, следовательно, оно может быть представлено, как произведение простых, одним и только одним способом. Так как p делит m, оно делит также $m - pp'$, поэтому p должно входить в разложение $m - pp'$.

(Мы пользуемся следующим вспомогательным утверждением: если разложение числа n на простые множители единственно, то каждый простой множитель n должен входить в это разложение. Действительно, пусть a — какое-нибудь простое число, делящее n, тогда $n = ab$, где b — некоторое целое число; разложение n можно получить из разложения b, добавив простой множитель a. Так как по предположению имеется только одно разложение n на простые, то a должно встретиться в нем.)

Аналогично убеждаемся, что в это разложение должно входить и p'. Следовательно, разложение $m - pp'$ имеет вид

$$m - pp' = pp'QR\ldots,$$

где $Q, R, \ldots$ — простые числа. Отсюда следует, что число pp' делит m. Но $m = pqr\ldots$, поэтому (после сокращения на p) получается, что p' делит $qr\ldots$ Ввиду вспомогательного утверждения, приведенного выше в скобках, это невозможно, ибо $qr\ldots$ — число, меньшее m, и p' не является одним из простых $q, r, \ldots$, входящих в его разложение. Это противоречие доказывает, что для m выполнено $S(m)$. В силу возвратной индукции мы получаем, что любое n разложимо в произведение простых чисел единственным образом (с точностью до порядка сомножителей).

Индуктивное рассуждение можно применять различными способами.

Например, если

(1) базис индукции: $P(0)$ и $P(1)$ истинно,

(2) индуктивный шаг: для любого $n \geqslant 0$ из $P(n)$ следует $P(n+2)$,

то для всех $n \geqslant 0$ справедливо $P(n)$.

В действительности, два отдельных индуктивных доказательства комбинируются в одно (одно для четных чисел и другое для нечетных чисел). Приведем пример, где три индуктивных доказательства свернуты в одно.

Задача 3. Докажите, что если натуральное $n > 13$, то существуют такие натуральные числа a и b, что $n = 3a + 8b$.

Решение. Пусть $P(n)$ есть утверждение «$n = 3a + 8b$ для некоторых натуральных a и b». Будем использовать математическую индукцию.

Базис индукции. $P(14)$, $P(15)$ и $P(16)$ истинны, так как $14 = 2 \cdot 3 + 8$, $15 = 5 \cdot 3 + 0 \cdot 8$ и $16 = 0 \cdot 3 + 2 \cdot 8$.

Индуктивный шаг $\big(P(k) \supset P(k + 3)\big)$. Пусть для некоторого натурального $k > 13$ выполнено $P(n)$, т. е. существуют такие a и b, что $k = 3a + 8b$. Тогда $k + 3 = 3(a + 1) + 8b$, т. е. выполнено $P(k + 3)$.

В силу принципа математической индукции для всех $n > 13$ имеем $P(n)$. Действительно, здесь есть три отдельных доказательства: первое доказательство для последовательности чисел 14, 17, 20,…; второе — для последовательности 15, 18, 21,… и третье — для последовательности 16, 19, 22,…

Индуктивное доказательство может быть также проведено, когда индуктивный базис есть $P(m)$ и $P(m + 1)$ для фиксированного натурального числа m и индуктивный переход есть $P(k)\ \&\ P(k + 1) \supset P(k + 2)$ для произвольного $k \geqslant m$. Тогда в результате для всех $n \geqslant m$ справедливо $P(n)$.

Задача 4. Докажите, что для любого $n \geqslant 1$ выполнено неравенство

$$f(n) \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}.$$

Решение. Пусть $P(n)$ есть утверждение $f(n) \leqslant (5/3)^{n-1}$ для $n \geqslant 1$.

Базис индукции. Имеем $P(1)$: $1 \leqslant 1$ — истина и $P(2)$: $1 \leqslant 5/3$ — истина.

Индуктивный шаг. Пусть $k \geqslant 1$ и $P(k)\ \&\ P(k + 1)$ — истина. Тогда

$$f(k+2) = f(k) + f(k+1) \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{k} \ (\text{в силу } P(k) \text{ и } P(k+1)) =$$

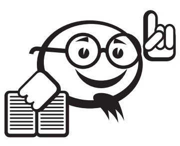
$$= \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} \cdot \left(1 + \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{8}{3}\right) < \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{25}{9}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^{k+1}.$$

Мы доказали $P(k + 2)$. Поэтому $P(n)$ справедливо для $n \geqslant 1$.

Парадоксы и софизм при математической индукции

1. **Парадокс неожиданной казни**. Мы уже встретились с этим парадоксом. Кажется, до сих пор не существует удовлетворительного разрешения этого парадокса, однако см. книгу Р. Смаллиана [3, с. 16–20].

2. **Парадокс Ришара**. Рассмотрим этот парадокс в иной форме по сравнению с оригинальным описанием в [4, с. 41].



Предложение 5. Каждое натуральное число *определяется* на русском языке фразой, содержащей менее 14 слов.

Доказательство. Пусть $P(n)$ будет утверждением:

«n определяется на русском языке фразой, содержащей менее четырнадцати слов».

Базис индукции. $n = 0$ определяется как «наименьшее натуральное число». Поскольку эта фраза содержит менее 14 слов, то $P(0)$ выполнено.

Индуктивный шаг. Пусть $k \geqslant 0$ фиксировано и допустим, что имеет место $P(0), P(1), \ldots, P(k-1)$, т. е. каждое число, меньшее k, определяется на русском языке фразой, содержащей менее 14 слов. Если k не определяется, то его можно определить как «наименьшее натуральное число, которое определяется на русском языке фразой, содержащей менее четырнадцати слов», — фраза состоит из 13 слов, и поэтому k становится определенным после этого. Это противоречие доказывает индуктивный шаг.

Следовательно, по математической индукции $P(n)$ справедливо для всех n, так что доказательство закончено.

В этом виде парадокс Ришара очень близок парадоксу Берри, описанному в параграфе 1.3 главы 1.

3. **Софизм**. **Все лошади одной масти**. То, что все лошади одной масти, можно доказать индукцией по числу лошадей в определенном табуне.

Доказательство. Если существует только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции тривиальна. Для индуктивного перехода предположим, что существует $n+1$ лошадь (с номерами от 1 до $n+1$). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до n одинаковой масти и, аналогично, лошади с номерами от 2 до $n+1$ имеют одинаковую масть. Но лошади посередине с номерами от 2 до n не могут изменять масть в зависимости от того, как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому лошади с номерами от 1 до n также должны быть одинаковой масти. Таким образом, все n лошадей одинаковой масти. Что и требовалось доказать.

Объяснение софизма. Поскольку базис индукции доказан для $n = 1$, то индуктивный переход от n к $n+1$ должен быть выполнен для всех $n \geqslant 1$. Но это невозможно, поскольку пересечение двух множеств $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $\{2, 3, \ldots, n+1\}$ пусто при $n = 1$.

4. **Парадокс изобретателя**. Попробуем доказать методом математической индукции неравенство

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geqslant 1.$$

Базис индукции:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{1}}.$$

По предположению индукции:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot \ \ldots \cdot 2k \cdot (2k+2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ \ldots \cdot 2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2},$$

и нам остается доказать, что

$$\frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \tag{4}$$

Возводя обе части неравенства в квадрат и избавляясь от знаменателей, приходим к эквивалентному неравенству

$$(k+1)(2k+1)^2 \leqslant k(2k+2)^2. \tag{5}$$

И далее, раскрывая скобки, — к неравенству

$$4k^3 + 8k^2 + 5k + 1 \leqslant 4k^3 + 8k^2 + 4k.$$

Это неравенство неверно! Следовательно, неверны и неравенства (5) и (4). Можно считать, что неверно исходное неравенство?

Нет нельзя. Неудача говорит лишь о том, что не годится конкретный метод доказательства — индукция.

Попробуем теперь доказать неравенство:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geqslant 1. \tag{6}$$

Неравенство (6) сильнее нашего исходного неравенства, и казалось бы, что доказывать его тем же методом — индукцией — дело безнадежное. Все же попробуем.

Базис индукции:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+1}}.$$

По предположению индукции:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot \ \ldots \cdot 2k \cdot (2k+2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ \ldots \cdot 2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2},$$

и нам надо доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

Снова возводя обе части неравенства в квадрат, избавляясь от знаменателей и раскрывая скобки, приходим к эквивалентному неравенству

$$4k^3 + 12k^2 + 9k + 2 \leqslant 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4.$$

Это неравенство верно.

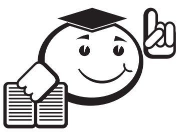
Следовательно, мы доказали (методом математической индукции) неравенство (6), из которого немедленно выводим наше первоначальное неравенство.

Как же это получается? Дело в том, что хотя во втором случае нам и пришлось доказывать более сильное заключение, но мы могли пользоваться и более сильным предположением индукции. Подобная ситуация получила название «***парадокс изобретателя***».

Этот термин ввел в научный оборот Дьёрдь Пойа [5, с. 138]. Он использовал наблюдение, что при доказательстве по математической индукции часто необходимо усиливать доказываемое предложение и индуктивное утверждение становится намного сложнее конечного результата. Эта необходимость усиливать результат, чтобы его строго обосновать, на первый взгляд кажется парадоксальной. Парадокс изобретателя используется для описания явлений в области математики, программирования и логики, а также в других областях, связанных с творческим мышлением.

Парадокс изобретателя связан со следующей логической и методологической проблемой. В доказательствах порою встречаются вспомогательные утверждения, более сложные, чем извлекаемые из них следствия. Можно ли хотя бы в принципе устранить окольные пути в доказательствах, когда мы доказываем лемму лишь затем, чтобы в дальнейшем применить ее в частных случаях? Доказательства без окольных путей называют также прямыми.

Н. Н. Непейвода в [6, с. 868–869; 7, с. 323–325] пишет, что даже в принципе в математических доказательствах внешне простых предложений нельзя обойтись без сложных лемм. Парадокс изобретателя показывает полную методологическую несостоятельность редукционизма и эмпиризма[1]. Человечество не может обойтись без концепций и идей высших уровней в логике и программировании.



Список литературы по модулю

[1] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. — 3-е изд. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — Т. 1, 2. — 464 с.

[2] Дэвенпорт Г. Высшая арифметика: Введение в теорию чисел. : пер. с англ. / Г. Дэвенпорт. — 2-е изд. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 176 с.

[3] Смаллиан Р. Вовеки неразрешимое. Путь к Гёделю через занимательные загадки / Р. Смаллиан. — М. : Канон, 2013. — 303 с.

[4] Клини С. К. Введение в метаматематику / С. К. Клини. — 2-е изд., испр. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 528 с.

[5] Пойа Д. Как решать задачу : пер. с англ. / Д. Пойа. — 4-е изд. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 208 с.

[6] Непейвода Н. Н. Основания программирования [Электронный ресурс] / Н. Н. Непейвода, И. Н. Скопин. — Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». — 2003. — 913 с. — URL : http://ulm.uni.udm.ru/~nnn/ (дата обращения: 08.05.2015).

[7] Непейвода Н. Н. Прикладная логика : учеб. пособие / Н. Н. Непейвода. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.

[1] Редукционизм — методологический принцип, согласно которому сложные явления могут быть полностью объяснены с помощью законов, свойственных явлениям более простым.

Эмпиризм — направление в теории познания, признающее чувственный опыт источником знания и считающее, что содержание знания может быть представлено либо как описание этого опыта, либо сведено к нему.