# Модуль 6.1. Индуктивное рассуждение

В математическом творчестве основные части: это догадка и доказательство. Догадка может быть направлена на получение гипотезы – предположения, истинность которого мы ожидаем. В этом случае, получив гипотезу, мы нуждаемся в ее доказательстве. Но нам необходимо также догадаться, как провести безупречное доказательство. Также решение серьезной математической задачи во многих случаях требует математического открытия (хотя бы для того, кто решает задачу). И в этом случае часто мы должны догадаться. В первой главе мы упомянули о двух видах логических рассуждений: индукции и дедукции. Рассмотрим подробно индукцию.

Индуктивное рассуждение – процесс получения общего утверждения на основе изучения частных примеров. Когда мы рассматриваем конечную последовательность чисел и предсказываем, каким будет следующее число, мы обнаруживаем некоторый образец, шаблон, которому удовлетворяют известные члены последовательности. Это типичная индукция.

## Пример 1

*Используйте индуктивное рассуждение, чтобы предсказать наиболее вероятное следующее число в последовательностях:*

*a. 3, 6, 9, 12, 15, ?*

*b. 1, 3, 6,10, 15, ?*

### Решение:

*a*. Каждое последующее число на 3 больше чем предыдущее, поэтому мы предсказываем, что после 15 должно следовать 18.

*b*. Первые два числа отличаются на 2. Разность между третьим и вторым равна 3. Рассмотрение следующих разностей приводит нас к мысли, что разности между соседними членами последовательно возрастают на 1. Поэтому логично предположить, что следующее число за 15 будет 21.

## Пример 2

*Используйте индуктивное рассуждение, чтобы предсказать наиболее вероятное следующее число в последовательности* $a_n$*:*

*2, 7, 24, 59, 118, 207, ?*

### Решение:

Ниже строки чисел данной последовательности выпишем разности соседних чисел:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | 7 | | 24 | | 59 | | 118 | | 207 |
| | 5 | | 17 | | 35 | | 59 | | 89 | |

Полученную последовательность обычно называют последовательностью *первых разностей* последовательности $a_n$. Но для первых разностей мы можем найти «свои» разности — вторые разности для последовательности $a_n$:

5 17 35 59 89

12 18 24 30

Теперь находим третьи разности для последовательности $a_n$:

12 18 24 30

6 6 6

Это позволяет определить очередную вторую разность 30 + 6 = 36, потом — очередную первую разность 89 + 36 = 125 и, наконец, 207 + 125 = 332 — очередной член последовательности $a_n$.

Примеры 1 и 2 являются учебными, так как, очевидно, любая конечная последовательность имеет бесконечное множество продолжений. В примерах речь идет о естественных, очевидных продолжениях. В математических задачах индукция возникает, когда имеется несколько частных случаев, для которых мы установили частные утверждения о каком-то математическом объекте, и нам хотелось бы получить общий закон. Очевидно, наш выбор догадок ограничен, так как математики проверяют свои гипотезы.

## Пример 3

Многоугольные числа, по мнению пифагорейцев, играют важную роль в структуре мироздания. Поэтому их изучением занимались многие математики античности. Большой интерес к фигурным числам проявили индийские математики и первые математики средневековой Европы. В Новое время многоугольными числами занимались Ферма, Эйлер, Ланегранж, Гаусс и другие. В классической интерпретации многоугольными числами мы называем числа, которые можно изобразить на плоскости в виде правильного многоугольника с помощью точек или шаров одинакового размера (рис. 1).

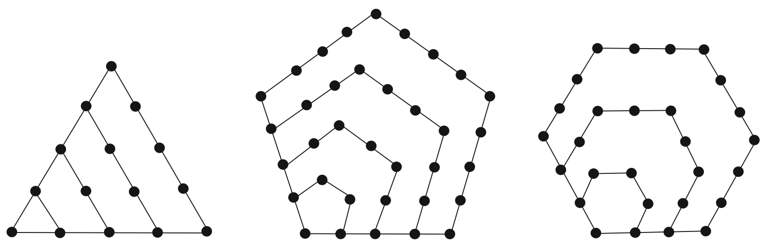


Рис. 1 – Треугольное, пятиугольное и шестиугольное числа

Наглядность многоугольных чисел способствовала с помощью индукции предсказывать многие утверждения. Ферма сформулировал в 1654 г. «золотую» теорему: любое натуральное число представимо в виде суммы $n$ $n$-угольных чисел. Гипотезу Ферма доказал Коши только в 1815 году [1, с. 62–65].

Треугольное число — это число кружков, которые могут быть расставлены в форме правильного треугольника. На рисунке 2 изображены первые пять треугольных числа $S_n$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

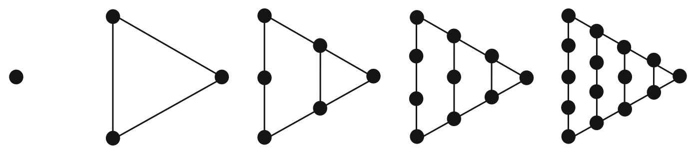
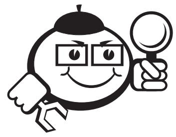


Рис. 2 – $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$, $S_4 = 10$, $S_5 = 15$

Очевидно, с чисто арифметической точки зрения, $n$-е треугольное число — это сумма $n$ первых натуральных чисел. Поэтому получаем

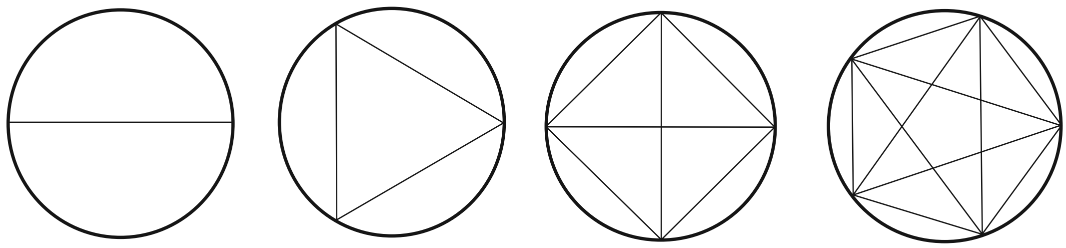
$$S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Заключение, основанное на индуктивном рассуждении, может быть некорректно.



## Пример 4

Известна задача [2, с. 50] об определении числа $R_n$ областей, образуемых $n(n-1)/2$ хордами, которые соединяют $n$ фиксированных точек на окружности, при предположении, что никакие три хорды не пересекаются внутри круга (рис. 3).



$R_2 = 2$ $R_3 = 4$ $R_4 = 8$ $R_5 = 16$

Рис. 3 – Хорды в круге

Результат при $n = 2, 3, 4, 5$ наводит на мысль, что $R_n = 2^{n-1}$, но $R_6 = 31$ (рис. 4).

Частный случай, показывающий ложность утверждения, истинность которого предполагалась в общем случае, называется ***контрпримером*** (общего утверждения). Наличие контрпримера опровергает доказываемое утверждение и заставляет выдвинуть новое предположение. На самом деле правильной формулой будет

$$R_n = 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{24}. \qquad (1)$$

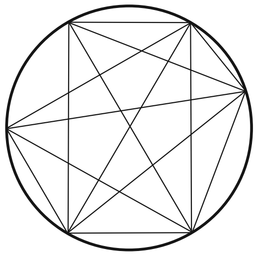


Рис. 4 – Контрпример: $R_6 = 31$

**Парадокс Гемпеля**[1]

В науке широко используется *принцип индукции*, который утверждает, что: «Наблюдение явления $X$, которое соответствует теории $T$, дополнительно подтверждает теорию $T$».

Предположим, биолог ищет доказательства своей гипотезы «Все вóроны — черные». Но для этого ему нет необходимости отправляться в экспедиции. Ибо в силу закона контрапозиции $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$, дополнительным свидетельством гипотезы является всякий нечерный предмет, найденный биологом дома (конечно, если он не окажется вороном).

Логика бессильна формализовать индукцию (но, см. [3], том 2), тем не менее она совершенно не препятствует использованию индукции в науке и в жизни: мы пользуемся ею чаще, чем всеми принципами формальной логики, вместе взятыми.

Логика очень важна в математике, однако она не настолько тесно связана с открытиями и изобретениями, как может показаться. Логика не указывает путь и не подсказывает, как найти решение. Этот путь открывают эксперимент, аналогия и интуиция, а затем логика превращает эти нехоженые тропинки в широкую магистраль, по которой может проехать любой.

## Список литературы по модулю

[1] Деза Е. И. Специальные числа натурального ряда : учеб. пособие / Е. И. Деза. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. — 240 с.

[2] Кострикин А. И. Введение в алгебру : В 3-х ч. Ч. I: Основы алгебры. — М. : МЦНМО, 2009. — 272 с.

[3] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. — 3-е изд. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — Т. 1, 2. — 464 с.

[1] Карл Густав Гемпель (1905–1997 гг.) — немецкий и американский философ.