Модуль 5.4. Теории первого порядка

Языки первого порядка используются в формальных теориях первого порядка.

Синтаксические свойства истинности теорий с языками первого порядка

Пусть нам дана некоторая формальная теория $\boldsymbol{T}$ с языком первого порядка Ω и задана интерпретация φ этого языка. Обозначим через $\boldsymbol{F}_{\varphi}$ множество всех формул теории $\boldsymbol{T}$, истинных в данной интерпретации. Множество $\boldsymbol{F}_{\varphi}$ обладает определенными свойствами, которые отражают заложенную в языки первого порядка логику, не зависящую от конкретных особенностей интерпретации.

Предварительно надо определить следующее понятие. Пусть дана формула P, свободное вхождение переменной x в P и терм t. Мы говорим, что ***данное вхождение*** x ***не связывает*** t ***в*** P, если оно не лежит в области действия ни одного квантора вида $\forall y$ и $\exists y$, где y — переменная, входящая в t.

Иными словами, после подстановки t вместо данного вхождения x все переменные, входящие в t, останутся свободными в P.

Чаще всего приходится подставлять терм вместо каждого из свободных вхождений данной переменной. Важно, что такая операция переводит термы в термы и формулы в формулы. Если каждое свободное вхождение x в P не связывает t, мы будем говорить просто, что ***терм*** t ***свободный для*** x ***в*** P.

Пример 1

1. Терм y свободен для переменной x в формуле $P(x)$, но тот же терм y не свободен для переменной x в формуле $\forall y P(x)$.

2. Терм $f(x, z)$ свободен для переменной x в формуле $\forall y P(x, y) \supset Q(x)$, но тот же терм $f(x, z)$ не свободен для переменной x в формуле $\exists z \forall y P(x, y) \supset Q(x)$.

Теперь мы готовы перечислить свойства $\boldsymbol{F}_{\varphi}$.

1. Для любой замкнутой формулы P либо $P \in \boldsymbol{F}_{\varphi}$, либо $\neg P \in \boldsymbol{F}_{\varphi}$.
2. Множество $\boldsymbol{F}_{\varphi}$ не содержит противоречия, т. е. ни для какой формулы P не может быть, чтобы одновременно выполнялось $P \in \boldsymbol{F}_{\varphi}$ и $\neg P \in \boldsymbol{F}_{\varphi}$.
3. Множество $\boldsymbol{F}_{\varphi}$ содержит все тавтологии языка Ω (см. главу 4, параграф 4.4).
4. Множество $\boldsymbol{F}_{\varphi}$ содержит следующие общезначимые формулы:

   а) $\forall x A(x) \supset A(t)$,

   где $A(t)$ есть формула теории $\boldsymbol{T}$ и t есть терм теории $\boldsymbol{T}$, свободный для x в $A(x)$. Условие, чтобы t был свободен для x, — гигиеническое правило при перемене обозначений;

   б) $\forall x\big(A \supset B(x)\big) \supset \big(A \supset \forall x B(x)\big)$,

   где A не содержит свободных вхождений переменной x;

   в) $\big(\forall x \neg A(x)\big) \sim \big(\neg \exists x A(x)\big)$.

5. Множество $\boldsymbol{F}_{\varphi}$ замкнуто относительно правил вывода modus ponens и обобщения. По определению это означает, что если $A \in \boldsymbol{F}_{\varphi}$ и $A \supset B \in \boldsymbol{F}_{\varphi}$, то также $B \in \boldsymbol{F}_{\varphi}$; если $A \in \boldsymbol{F}_{\varphi}$, то $\forall x A \in \boldsymbol{F}_{\varphi}$ для любой переменной x.

Определение теорий первого порядка

Теорией первого порядка называется теория с языком Ω первого порядка, обладающая всеми описанными в предыдущем пункте свойствами истинности. Теории первого порядка различаются сигнатурами Ω и аксиомами.

Аксиомы теории первого порядка $\boldsymbol{T}$ разбиваются на два класса: логические аксиомы (вместе с аксиомами равенства) и собственные (или нелогические).

Логические аксиомы: каковы бы ни были формулы A, B и C теории $\boldsymbol{T}$, следующие формулы являются логическими аксиомами теории $\boldsymbol{T}$:

$\boldsymbol{A}_1$. $A \supset (B \supset A)$.

$\boldsymbol{A}_2$. $\big(A \supset (B \supset C)\big) \supset \big((A \supset B) \supset (A \supset C)\big)$.

$\boldsymbol{A}_3$. $(\neg B \supset \neg A) \supset \big((\neg B \supset A) \supset B\big)$.

$\boldsymbol{A}_4$. $\forall x A(x) \supset A(t)$, где $A(t)$ есть формула теории $\boldsymbol{T}$ и t есть терм теории $\boldsymbol{T}$, свободный для x в $A(x)$. Заметим, что t может совпадать с x, и тогда мы получаем аксиому $\forall x A(x) \supset A(x)$.

$\boldsymbol{A}_5$. $\forall x\big(A \supset B(x)\big) \supset \big(A \supset \forall x B(x)\big)$, где A не содержит свободных вхождений переменной x.

Аксиомы равенства.

$\boldsymbol{A}_6$. $t_1 = t_1$.

$\boldsymbol{A}_7$. $t_1 = t_2 \supset t_2 = t_1$.

$\boldsymbol{A}_8$. $t_1 = t_2 \mathbin{\&} t_2 = t_3 \supset t_1 = t_3$.

$\boldsymbol{A}_9$. $t_1 = s_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} t_n = s_n \supset f(t_1, \ldots, t_n) = f(s_1, \ldots, s_n)$.

$\boldsymbol{A}_{10}$. $t_1 = s_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} t_n = s_n \supset P(t_1, \ldots, t_n) \equiv P(s_1, \ldots, s_n)$.

В этих аксиомах $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n$ — любые термы, f — любой n-местный функциональный символ из Ω, P — любой n-местный предикатный символ из Ω.

Собственные аксиомы: таковые не могут быть сформулированы в общем случае, ибо меняются от теории к теории.

Правилами вывода во всякой теории первого порядка являются:

1. Modus ponens:

$$\frac{A,\ A \supset B}{B}\ MP.$$

2. Правило обобщения:

$$\frac{A(x)}{\forall x A(x)}\ Gen.$$

Формула B называется ***непосредственным следствием формул*** A, $A \supset B$ ***по правилу modus ponens***. Формула $\forall x A(x)$ называется ***непосредственным следствием формулы*** $A(x)$ ***по правилу обобщения***.

Интуитивный смысл правил вывода следующий. Правило modus ponens отвечает элементарному рассуждению типа: если верно A и верно, что из верности A следует верность B, то верно B. Правило обобщения соответствует практике записи тождества или универсально верных утверждений в математике. Когда мы пишем $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ или «в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», кванторы $\forall ab$, $\forall$ (треугольник) опускаются.

Теория первого порядка, которая не содержит собственных аксиом, называется ***исчислением предикатов первого порядка***. ***Чистым исчислением предикатов*** называется исчисление предикатов первого порядка, не содержащее предметных констант и функторов.

Аксиомы $\boldsymbol{A}_1$–$\boldsymbol{A}_3$ являются также аксиомами исчисления высказываний, поэтому с помощью правила modus ponens выводимы все тавтологии языка Ω. Аксиомы $\boldsymbol{A}_4$–$\boldsymbol{A}_5$ называются «логическими аксиомами с кванторами». Аксиома $\boldsymbol{A}_4$ (***аксиома специализации***) означает, что если $A(x)$ верна для любого x, то $A(t)$ верна для любого t, где t — имя любого объекта.

Пример 2

Теории первого порядка с собственными аксиомами широко распространены в математике. Некоторые из них применяются в логическом программировании [1, 2]. Логическое программирование является, пожалуй, наиболее впечатляющим примером применения идей и методов математической логики (точнее, одного из ее разделов — теории логического вывода) в программировании.

Идея использования языка логики предикатов первого порядка в качестве языка программирования возникла еще в 60-е годы, когда создавались многочисленные системы автоматического доказательства теорем и основанные на них вопросно-ответные системы. Суть этой идеи заключается в том, чтобы программист не указывал машине последовательность шагов, ведущих к решению задачи, как это делается во всех процедурных языках программирования, а описывал на логическом языке свойства интересующей его области, иначе говоря, описывал мир своей задачи. Другие свойства и удовлетворяющие им объекты машина находила бы сама путем построения логического вывода.

Первые компьютерные реализации систем автоматического доказательства теорем появились в конце 50-х годов, а в 1965 г. Дж. Робинсон[1] предложил метод резолюций [3], который и по сей день лежит в основе большинства систем поиска логического вывода.

Наиболее распространен язык логического программирования Пролог. Составляя программу на языке Пролог, программист тем самым создает прикладную теорию первого порядка — записывает собственные аксиомы теории и ничего больше. Причем эти аксиомы пишутся в таком виде, что программировать может даже человек, не знающий математической логики. Интерпретатор с языка Пролог содержит все остальные (логические) аксиомы и пытается доказать формулы, предлагаемые программистом.

Теорема 6. Если теория первого порядка противоречива, то в ней выводима любая формула.

[1] Джон Алан Робинсон (англ. *John Alan Robinson*; род. 1930 г.) — английский философ и логик.

Доказательство. В самом деле, пусть формулы A и $\neg A$ выводимы в теории. Формула $\neg A \supset (A \supset B)$ является тавтологией в исчислении высказываний, следовательно, она выводима. Её вывод, поскольку он содержит только MP, остается выводом и в любой теории первого порядка. Поэтому формула $\neg A \supset (A \supset B)$ выводима в теории первого порядка. Дважды применяя MP, мы получаем вывод произвольной формулы B.

Таким образом, для доказательства непротиворечивости какой-либо теории первого порядка достаточно установить недоказуемость в этой теории хотя бы одной формулы.

В теориях первого порядка импликация очень тесно связана с выводимостью.

Теорема 7 (о дедукции). Если $\Gamma \cup A \vdash B$, то $\Gamma \vdash A \supset B$.

Доказательство см., например, в [4, с. 70].

Теорема 8. Пусть T — теория первого порядка и логические аксиомы $\boldsymbol{A}_1$–$\boldsymbol{A}_5$ теории являются подмножеством множества формул S. Тогда если $S \vdash P$, то либо S — противоречиво, либо P общезначима.

Доказательство см., например, в [4, с. 64].

Теорема 8 говорит о корректности исчисления предикатов: для любой формулы P из $\vdash P$ следует $\vDash P$.

Теорема 9 (Гёделя о полноте). Пусть T — теория первого порядка и логические аксиомы теории являются подмножеством множества формул. Тогда:

а) формула P выводима из S в том и только том случае, когда либо S — противоречиво, либо P общезначима;

б) формула P независима от S в том и только том случае, когда $S \cup \{P\}$ и $S \cup \{\neg P\}$ непротиворечивы.

Доказательство см., например, в [5, с. 64–69; 4, с. 84–86].

Следствие. Если теория первого порядка непротиворечива, то она полна. В частности, исчисление предикатов — полная теория.

Другими словами, в исчислении предикатов доказуемы все общезначимые формулы и только они.

Теорема 10. Замкнутая формула A является логическим следствием замкнутого множества замкнутых формул Γ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash A$.

Доказательство см., например, в [4, с. 87].

Аксиоматические теории можно различать в зависимости от того, какая система, семантическая или дедуктивная, лежит в основе определения теории.

Множество замкнутых формул, которые логически следуют из данного множества аксиом, называется ***неформальной аксиоматической теорией***.

Множество замкнутых формул, которые доказуемы в теории первого порядка из данного множества аксиом, называется ***формальной аксиоматической теорией***.

Переформулируем теорему 10 в новых терминах: неформальная аксиоматическая теория с аксиомами Γ совпадает с формальной аксиоматической теорией с аксиомами Γ.

Полнота исчисления предикатов никак не облегчает жизнь в отношении разрешимости.

Теорема 11 (Чёрч)[1]. Исчисление предикатов неразрешимо.

Доказательство см. в [6, с. 297–300].

Список литературы по модулю

[1] Братко И. Алгоритмы искусственного интеллекта на языке PROLOG : пер. с англ. / И. Братко. — 3-е изд. — М. : Вильямс, 2004. — 640 с.

[2] Логический подход к искусственному интеллекту: От классической логики к логическому программированию : пер. с франц. / А. П. Тейз [и др.]. — М. : Мир, 1990. — 432 с.

[3] Robinson J. A. A machine-oriented logic based on resolution principle // Journal of the ACM. — 1965. — N 12 — P. 23–41.

[4] Успенский В. А. Вводный курс математической логики / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 128 с.

[5] Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое / Ю. И. Манин. — М. : Мир ; Советское радио, 1979. — 168 с.

[6] Клини С. К. Математическая логика / С. К. Клини. — 2-е изд. — М. : Едиториал УРСС, 2005. — 480 с.

[1] Алонзо Чёрч (1903–1995 гг.) — выдающийся американский математик и логик, внесший значительный вклад в основы информатики.