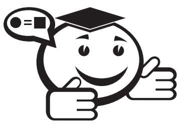
Модуль 5.3. Исчисление высказываний

Мы опишем применение аксиоматического метода к пропозициональной логике. В результате получим формальную аксиоматическую теорию, называемую исчислением высказываний. Семантическая система в языке пропозициональной логики уже введена, введем дедуктивную систему.



Исчислением высказываний *называется формальная теория с языком логики высказываний, со схемами аксиом*

$\boldsymbol{A}_1)\quad A \supset (B \supset A);$

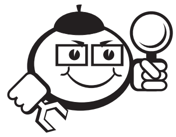
$\boldsymbol{A}_2)\quad \big(A \supset (B \supset C)\big) \supset \big((A \supset B) \supset (A \supset C)\big);$

$\boldsymbol{A}_3)\quad (\neg B \supset \neg A) \supset \big((\neg B \supset A) \supset B\big)$

*и правилом вывода MP (**modus ponens** — обычно переводится как **правило отделения**):*

$$\frac{A,\ A \supset B}{B}\,MP.$$

Здесь A, B и C — *любые* пропозициональные формулы[1]. Таким образом, множество аксиом исчисления высказываний бесконечно, хотя задано тремя схемами аксиом. Множество правил вывода также бесконечно, хотя оно задано только одной схемой.



Пример 1

Для любой формулы A построим вывод формулы $A \supset A$, т. е. $A \supset A$ — теорема.

Подставляем в схему аксиом $\boldsymbol{A}_2$ вместо B формулу $A \supset A$ и вместо C формулу A, получаем аксиому

$$\Big(A \supset \big((A \supset A) \supset A\big)\Big) \supset \Big(\big(A \supset (A \supset A)\big) \supset (A \supset A)\Big). \tag{1}$$

Подставляем в $\boldsymbol{A}_1$ вместо формулы B формулу $A \supset A$, получаем аксиому

$$A \supset \big((A \supset A) \supset A\big). \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) по правилу *MP* получаем

$$\big(A \supset (A \supset A)\big) \supset (A \supset A). \tag{3}$$

Подставляем в $\boldsymbol{A}_1$ вместо формулы B формулу A, получаем аксиому

$$A \supset (A \supset A). \tag{4}$$

[1] До конца этого параграфа под словом «формула» мы будем понимать только пропозициональные формулы.

Из формул (3) и (4) по правилу *MP* получаем $A \supset A$.

Теорема 2. Пусть Γ — произвольное множество гипотез. Если $\Gamma \vdash A \supset B$ и $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \vdash B$.

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — вывод формулы A из Γ, где A_n совпадает с A. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — вывод формулы $A \supset B$ из Γ, где B_m совпадает с $A \supset B$. Тогда $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m, B$ — вывод формулы B из Γ. Последняя формула в этом выводе получена применением правила *MP* к формулам A_n и B_m.

В исчислении высказываний импликация очень тесно связана с выводимостью.

Теорема 3 (о дедукции, Эрбран)[1]. Пусть Γ — множество формул. Имеем $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash A \supset B$.

Следствие:

1. $A \supset B, B \supset C \vdash A \supset C$.
2. $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$.

Доказательство 1.

(a) $A \supset B$ гипотеза.

(b) $B \supset C$ гипотеза.

(c) A гипотеза.

(d) B применяя *MP* из (a) и (c).

(e) C применяя *MP* из (b) и (d).

Таким образом, $A \supset B, B \supset C, A \vdash C$. И по теореме дедукции, $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$.

Доказательство 2.

(a) $A \supset (B \supset C)$ гипотеза.

(b) B гипотеза.

(c) A гипотеза.

(d) $B \supset C$ применяя *MP* из (a) и (c).

(e) C применяя *MP* из (b) и (d).

Таким образом, $A \supset (B \supset C), B, A \vdash C$. И по теореме дедукции, $A \supset (B \supset C), B \vdash A \supset C$.

Пример использования теоремы о дедукции см. в параграфе 7.3 главы 7.

[1]Жак Эрбран (1908–1931 гг.) — французский математик и логик.

Полнота, разрешимость и непротиворечивость исчисления высказываний

В исчислении высказываний у нас есть два понятия, касающиеся формул: теорема и тавтология. Аксиомы и правило вывода придуманы так, что эти два понятия совпадают.

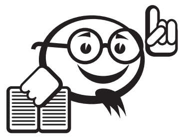
Наша цель — показать, что формула исчисления высказываний является тавтологией тогда и только тогда, когда она есть теорема. В одну сторону это совсем просто.

Теорема 4.

1. Любая аксиома в исчислении высказываний является тавтологией.
2. Любая теорема в исчислении высказываний является тавтологией.

Доказательство. То, что каждая аксиома A_1–A_3 является тавтологией, легко проверить с помощью таблиц истинности. Для доказательства п. 2 теоремы достаточно доказать, что правило *MP*, примененное к тавтологиям, приводит к тавтологиям.

Действительно, пусть при произвольном распределении истинностных значений формулы A и $A \supset B$ являются тавтологиями. Тогда формула A истинна и, по свойствам импликации, B истинно. Следовательно, B — тавтология. Доказательства обратного утверждения смотрите в [1].



Теорема 5 (Поста[1], 1921 г.). Формула A в исчислении высказываний является теоремой тогда и только тогда, когда A — тавтология.

Интерпретация формул исчисления высказываний проста — область интерпретации состоит из двух значений «истина» и «ложь»; поэтому пропозициональная переменная принимает только значения **И** и **Л** и интерпретация составной формулы вычисляется по известным законам с помощью логических операций над истинностными значениями. Поскольку любая формула содержит только конечное число пропозициональных переменных, то формула обладает только конечным числом различных интерпретаций. Следовательно, исчисление высказываний является, очевидно, разрешимой формальной теорией.

Легко убедиться, что исчисление высказываний является непротиворечивой теорией. Действительно, все теоремы исчисления высказываний суть тавтологии. Следовательно, никакая опровержимая формула не может быть доказана.

Другие аксиоматизации исчисления высказываний

Теория, определенная для пропозициональной логики, не является единственно возможной аксиоматизацией исчисления высказываний. Её основное достоинство — лаконичность при сохранении определенной наглядности. Действительно, в теории всего две связки, три схемы аксиом и одно правило. Известны и многие

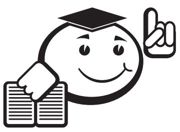
[1] Эмиль Леон Пост (1897–1954 гг.) — американский математик и логик.

другие аксиоматизации исчисления высказываний, предложенные различными авторами [1, с. 48–51]. В классической логике все аксиоматизации приводят к одному множеству выводимых формул.

Например, оставив *MP* как единственное правило вывода, можно объявить схемами аксиом следующие формулы:

- $A \supset (B \supset A)$;
- $\big(A \supset (B \supset C)\big) \supset \big((A \supset B) \supset (A \supset C)\big)$;
- $A \,\&\, B \supset A$;
- $A \,\&\, B \supset B$;
- $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$;
- $A \supset A \vee B$;
- $B \supset A \vee B$;
- $(A \supset C) \supset \big((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C)\big)$;
- $\neg A \supset (A \supset B)$;
- $(A \supset B) \supset \big((A \supset \neg B) \supset \neg A\big)$;
- $A \vee \neg A$.

Последняя аксиома $A \vee \neg A$, называемая «***законом исключенного третьего***» и иногда читаемая как «третьего не дано» (*tertium non datur* в латинском оригинале), вызвала в первой половине XX века большое количество споров.



Список литературы по модулю

[1] Мендельсон Э. Введение в математическую логику / Э. Мендельсон. — М. : Наука, 1976. — 320 с.