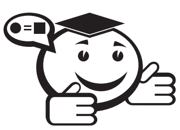
Модуль 5.2. Формальные аксиоматические теории

Дадим предварительные определения важных понятий, связанных с аксиоматическими теориями, наделенными семантической и дедуктивной структурами. Эти определения будут уточнены в дальнейшем в случае теорий с языками первого порядка.

Определение формальной аксиоматической теории

Как правило, понятие «*теория*» используется, когда в языке присутствует дедуктивная система. Обычно она определяется следующим образом.



Формальная теория T *считается определенной, если:*

- *задано некоторое счетное множество* ***A*** *символов — символов теории* ***T****; конечные последовательности символов теории* ***T*** *называются* ***выражениями*** *теории* ***T*** *(множество выражений обозначают через* $\boldsymbol{A}^*$*);*
- *имеется подмножество* $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{A}^*$ *выражений теории* ***T****, называемых* ***формулами*** *теории* ***T****;*
- *выделено некоторое множество* $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{F}$ *формул, называемых* ***аксиомами*** *теории* ***T****;*
- *имеется конечное множество* $\{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ *отношений между формулами, называемых* ***правилами вывода****. Правила вывода позволяют получать из некоторого конечного множества формул другое множество формул.*

Множество символов ***A*** — ***алфавит теории*** — может быть конечным или бесконечным. Обычно для образования символов используют конечное множество букв, к которым, если нужно, приписывают в качестве индексов натуральные числа.

Множество формул ***F*** обычно задается индуктивным определением, например с помощью формальной грамматики. Как правило, это множество бесконечно. Множества ***A*** и ***F*** в совокупности определяют ***язык формальной теории***.

Множество аксиом ***B*** может быть конечным или бесконечным. Если множество аксиом бесконечно, то, как правило, оно задается с помощью конечного множества ***схем аксиом*** и правил порождения конкретных аксиом из схемы аксиом[1]. Обычно для формальной теории имеется алгоритм, позволяющий по данному выражению определить, является ли оно формулой. Точно так же чаще всего существует алгоритм, выясняющий, является ли данная формула теории ***T*** аксиомой; в таком случае ***T*** называется ***эффективно аксиоматизированной*** теорией.

[1] Каждая аксиома получается из схемы заменой переменных в схеме, как правило, на произвольные формулы.

Выводимость

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, A$ — формулы теории $\boldsymbol{T}$. Если существует такое правило вывода R, что $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n, A\rangle \in R$, то говорят, что формула A ***непосредственно выводима*** *из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ по правилу вывода R. Обычно этот факт записывают следующим образом:*

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{A} R,$$

где формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***посылками****, а формула A —* ***заключением****.*

Выводом *формулы A из множества формул Γ в теории $\boldsymbol{T}$ называется такая последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$, что $A = F_k$, а любая формула F_i $(i < k)$ является либо аксиомой, либо $F_i \in \Gamma$, либо непосредственно выводима из ранее полученных формул $F_{j_1}, \ldots, F_{j_n}$ $(j_1, \ldots, j_n < i)$. Если в теории $\boldsymbol{T}$ существует вывод формулы A из множества формул Γ, то это записывается следующим образом:*

$$\Gamma \vdash_{\boldsymbol{T}} A,$$

где формулы из Γ называются ***гипотезами*** *вывода, а формула A —* ***выводимой*** *из множества Γ. Если теория $\boldsymbol{T}$ подразумевается, то её обозначение обычно опускают.*

Если множество Γ конечно: $\Gamma = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, то вместо

$$\{B_1, B_2, \ldots, B_n\} \vdash A$$

пишут $B_1, B_2, \ldots, B_n \vdash A$. Если Γ есть пустое множество $\varnothing$, то A называют ***теоремой*** *(или* ***доказуемой*** *формулой) и в этом случае используют сокращенную запись $\vdash A$ («A есть теорема»).*

Отметим, что в соотношении $\{$теоремы$\} \subset \{$формулы$\} \subset \{$выражения$\}$ включение множеств является строгим.

Обычно дедуктивная система удовлетворяет требованиям, сформулированным в замечании 1 (параграф 5.1).

Приведем несколько простых свойств понятия выводимости из посылок.

1. Если $\Gamma \subseteq \Sigma$ и $\Gamma \vdash A$, то $\Sigma \vdash A$.

   Это свойство выражает тот факт, что если A выводимо из множества гипотез Γ, то оно остается выводимым, если мы добавим к Γ новые гипотезы.

2. $\Gamma \vdash A$ тогда и только тогда, когда в Γ существует конечное подмножество Σ, для которого $\Sigma \vdash A$.

Часть «тогда» утверждения 2 вытекает из утверждения 1. Часть «только тогда» этого утверждения очевидна, поскольку всякий вывод A из Γ использует лишь конечное число гипотез из Γ.

3. Если $\Sigma \vdash A$ и $\Gamma \vdash B$ для любого B из множества Σ, то $\Gamma \vdash A$.

Смысл этого утверждения прост: если A выводимо из Σ и любая формула из Σ выводима из Γ, то A выводима из Γ.

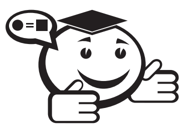
Понятие формальности можно определить в терминах теории алгоритмов: теорию $\boldsymbol{T}$ можно считать формальной, если построен алгоритм[1] для проверки правильности рассуждений с точки зрения принципов теории $\boldsymbol{T}$. Это значит, что если некто предлагает математический текст, являющийся, по его мнению, доказательством некоторой теоремы в теории $\boldsymbol{T}$, то, применяя алгоритм, мы можем проверить, действительно ли предложенный текст соответствует стандартам правильности, принятым в $\boldsymbol{T}$. Таким образом, стандарт правильности рассуждений для теории $\boldsymbol{T}$ определен настолько точно, что проверку его соблюдения можно передать компьютеру (следует помнить, что речь идет о *проверке правильности* готовых доказательств, а не об их поиске!). Если проверку правильности доказательств в какой-либо теории нельзя передать компьютеру и она доступна в полной мере только человеку, значит, еще не все принципы теории аксиоматизированы (то, что мы не умеем передать компьютеру, остается в нашей интуиции и «оттуда» регулирует наши рассуждения).

Интерпретация, модель

Семантическую систему теории вводим с помощью следующих понятий.

Понятие интерпретации аксиоматической теории определяется как обобщение интерпретации языков первого порядка. Это позволяет ввести понятие истинности.

Следующие понятия есть просто обобщение понятий, введенных для языков первого порядка.



*Формула P называется **общезначимой**, если она истинна в каждой интерпретации теории (обозначается $\vDash P$).*

*Формула P называется **противоречием**, если формула P ложна во всякой интерпретации теории.*

Формализация задается не только синтаксисом и семантикой формального языка (эти компоненты как раз чаще всего берутся традиционными из хорошо известного крайне ограниченного набора), но и множеством утверждений, которые считаются истинными. Именно эта формулировка базисных свойств, аксиом, описывающих некоторую предметную область, обычно рассматривается как математическое описание объектов. Таким образом, практически нас интересуют не все интерпретации данной теории, а лишь те из них, на которых выполнены аксиомы.

[1]Пока мы можем довольствоваться нашим интуитивным пониманием алгоритмов. Точное определение понятия алгоритма смотрите в главе 7.

При рассмотрении аксиоматических теорий в общем виде любое множество замкнутых формул данного языка может быть принято в качестве системы аксиом. Пусть Γ — произвольное множество замкнутых формул языка.

*Интерпретация называется **моделью множества формул** Γ, если все формулы этого множества истинны в данной интерпретации. Множество* Γ *называется **совместным**, если оно имеет хотя бы одну модель.*

Если в аксиоматической теории вводят семантическую и дедуктивную систему, то это делают таким образом, чтобы доказуемые формулы были истинными. В этом случае говорят, что дедуктивная система *корректна* относительно семантической системы.

- ***Моделью теории** называется такая интерпретация, в которой истинны все теоремы теории (для этого достаточно, чтобы были истинны все аксиомы теории).*
- *Формула P называется **логическим следствием** (семантическим следствием) множества формул* Γ*, если P выполняется в любой модели* Γ *(обозначается $\Gamma \vDash P$).*
- *Формула B является **логическим следствием** формулы A (обозначение: $A \vDash B$), если формула B выполнена в любой интерпретации, в которой выполнена формула A.*
- *Формулы A и B **логически эквивалентны** (обозначение: $A \equiv B$), если они являются логическим следствием друг друга.*

При изучении аксиоматических теорий нужно различать теоремы аксиоматической теории и теоремы об аксиоматической теории, или ***метатеоремы***. Это различие не всегда явно формализуется, но всегда является существенным.

Множество теорем аксиоматической теории является точно определенным объектом (обычно бесконечным), и поэтому можно доказывать утверждения, относящиеся ко всем теоремам одновременно. Например, в теории ***Ch*** (параграф 5.1) множество всех теорем оказывается, правда, конечным (хотя конечность эта с практической точки зрения ближе к бесконечности). Легко доказать следующее утверждение, относящееся ко *всем* теоремам ***Ch***: ни в одной теореме белые не имеют 10 ферзей. В самом деле, достаточно заметить, что в аксиоме ***Ch*** белые имеют одного ферзя и восемь пешек и что по правилам игры белым ферзем может стать только белая пешка. Следовательно, $1 + 8 < 10$. Таким образом, мы подметили в системе аксиом и правил вывода теории ***Ch*** особенности, которые делают справедливым наше общее утверждение о теоремах ***Ch***.

Аналогичные возможности имеем в случае теории ***L*** (параграф 5.1). Можно доказать, например, следующее утверждение, относящееся ко всем теоремам ***L***: если X — теорема, то aaX — тоже теорема (см. пример 1 в параграфе 6.2 главы 6).

*Формальная теория **T** с языком первого порядка называется **противоречивой**, если существует формула A, доказуемая вместе со своим отрицанием ¬A. Теория называется **непротиворечивой**, если она не является противоречивой. В другой терминологии говорят также, что теория **синтаксически** (или **дедуктивно**) **непротиворечива**.*

Формальная теория пригодна для описания тех предметных областей, которые являются ее моделями. Справедлива теорема 1.

Теорема 1. Модель для формальной теории ***T*** существует тогда и только тогда, когда ***T*** синтаксически непротиворечива.

Полнота, независимость и разрешимость

Пусть универсум *M*, рассматриваемый с соответствующей интерпретацией, является моделью формальной теории ***T***.

*Формальная теория **T** называется **полной** (относительно данной интерпретации), если каждому истинному высказыванию об объектах M соответствует теорема теории **T**.*

*Если для предметной области M существует формальная полная непротиворечивая теория **T**, то M называется **аксиоматизируемой** (или **формализуемой**).*

*Система аксиом (или аксиоматизация) непротиворечивой теории **T** называется **независимой**, если никакая из аксиом не выводима из остальных по правилам вывода теории **T**.*

Одним из первых вопросов, которые возникают при задании формальной теории, является вопрос о том, возможно ли, рассматривая какую-нибудь формулу формальной теории, определить, является ли она доказуемой или нет. Другими словами, речь идет о том, чтобы определить, является ли данная формула теоремой или *не теоремой* и как это доказать.

*Формальная теория **T** называется **разрешимой**, если существует алгоритм, который для любой формулы теории определяет, является ли эта формула теоремой теории.*

*Формальная теория **T** называется **полуразрешимой**, если существует алгоритм, который для любой формулы P теории выдает ответ «да», если P является теоремой теории, и выдает «нет» или, может быть, не выдает никакого ответа, если P не является теоремой (т. е. алгоритм применим не ко всем формулам).*

Рис. 1 – Дуглас Хофштадтер

Для первоначального знакомства с аксиоматическими теориями познакомимся с простыми учебными примерами, взятыми из книги Дугласа Хофштадтера[1] (рис. 1) «Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда» [1].

Формальная система *MIU*

Алфавит: M, I, U.

Формулы = $\{M, I, U\}^*$.

Определим дедуктивную систему.

Аксиома: MI.

Правила вывода:

1) $xI \to xIU$ (продукция);
2) $Mx \to Mxx$ (продукция);
3) $III \to U$ (правило переписывания);
4) $UU \to \varnothing$ (правило переписывания, $\varnothing$ обозначает пустую строку).

Продукция — это правило, применяемое к формулам, рассматриваемым как единое целое, а правило переписывания — правило, которое может применяться к любой подформуле формулы.

Приведем типичный вывод в этой теории:

MI	Аксиома
MII	Правило 2
MIIII	Правило 2
MUI	Правило 3
MUIU	Правило 1
MUIUUIU	Правило 2
MUIIU	Правило 4

Любые утверждения о свойствах этой теории являются метатеоремами. Читателю предлагается задача: «Найдите вывод *MU* или докажите, что он невозможен».

Формальная система *PR*

Алфавит: $\{P, R, -\}$.

Выражения — элементы $\{P, R, -\}^*$.

Формулы — строки вида $xPyRz$, где x, y и z — строки, состоящие только из тире.

Определим дедуктивную систему.

Схема аксиом:

$xP{-}Rx{-}$ является аксиомой, когда x состоит только из тире (каждое из двух вхождений x замещает одинаковое число тире).

Правило вывода (схема).

Пусть x, y и z — строки, состоящие только из тире. Пусть $xPyRz$ является теоремой. Тогда $xPy{-}Rz{-}$ также будет теоремой.

В системе *PR* используются только удлиняющие правила, т. е. количество символов в формуле в результате применения правила вывода увеличивается.

[1] Дуглас Роберт Хофштадтер (род. 1945 г.) — американский физик и информатик. Получил всемирную известность благодаря книге «Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда», опубликованной в 1979 году и в 1980 году получившей Пулитцеровскую премию в категории «Нехудожественная литература».

Определим семантическую структуру. Выберем следующую интерпретацию системы PR (одну из возможных).

- Универсум — множество целых положительных чисел.
- Строка, состоящая из n тире, интерпретируется как число n.
- P интерпретируется как символ $+$.
- R интерпретируется как символ $=$.

Нетрудно убедиться, что указанная интерпретация теореме $xPyRz$ ставит в соответствие истинное утверждение о целых положительных числах «$x+y=z$» и поэтому данная интерпретация является моделью системы PR.

Теперь мы можем использовать более простой разрешающий алгоритм для теории PR: формула $xPyRz$ является теоремой тогда и только тогда, когда $x+y=z$ — истина.

В модели теоремы и истины совпадают — т. е. между теоремами и фрагментами реального мира существует изоморфизм.

Грубо говоря, изоморфизм есть преобразование, сохраняющее информацию. Слово «изоморфизм» применимо к тем случаям, когда две сложные структуры могут быть отображены одна в другую таким образом, что каждой части одной структуры соответствует какая-то часть другой структуры («соответствие» здесь означает, что эти части выполняют в своих структурах сходные функции).

При данной интерпретации есть изоморфизм между системой PR и сложением натуральных чисел.

Формальная система *UR*

Алфавит: $\{U, R, -\}$.

Выражения — элементы $\{U, R, -\}^*$.

Формулы — строки вида $xUyRz$, где x, y и z — строки, состоящие только из тире.

Определим дедуктивную систему.

Схема аксиом:

$xU{-}Rx$ является аксиомой, когда x состоит только из тире (каждое из двух вхождений x замещает одинаковое число тире).

Правило вывода (схема).

Пусть x, y и z — строки, состоящие только из тире. Пусть $xUyRz$ является теоремой. Тогда $xUy{-}Rzx$ также будет теоремой.

Определим семантическую структуру. Выберем следующую интерпретацию системы UR.

- Универсум — множество целых положительных чисел.
- Строка, состоящая из n тире, интерпретируется как число n.
- U интерпретируется как символ $\times$.
- R интерпретируется как символ $=$.

Нетрудно убедиться, что указанная интерпретация теореме $xUyRz$ ставит в соответствие истинное утверждение о целых положительных числах «$x\times y=z$» и поэтому данная интерпретация является моделью системы UR.

Формальная система *PR*1

Алфавит: $\{P, R, -\}$.

Выражения — элементы $\{P, R, -\}^*$.

Формулы — строки вида $xPyRz$, где x, y и z — строки, состоящие только из тире.
Определим дедуктивную систему.
Схемы аксиом:

1) $xP{-}Rx{-}$ является аксиомой, когда x состоит только из тире (каждое из двух вхождений x замещает одинаковое число тире).
2) $xP{-}Rx$ является аксиомой, когда x состоит только из тире (каждое из двух вхождений x замещает одинаковое число тире).

Правило вывода (схема).

Пусть x, y и z — строки, состоящие только из тире. Пусть $xPyRz$ является теоремой. Тогда $xPy{-}Rz{-}$ также будет теоремой.

Рассмотрим различные интерпретации системы $PR1$.

1. Выберем интерпретацию системы $PR1$ такую же, как для PR.

- Универсум — множество целых положительных чисел.
- Строка, состоящая из n тире, интерпретируется как число n.
- P интерпретируется как символ $+$.
- R интерпретируется как символ $=$.

Указанная интерпретация теореме $xPyRz$ ставит в соответствие утверждение о целых положительных числах «$x + y = z$». Но эти утверждения могут быть и ложными, поэтому данная интерпретация не является моделью системы $PR1$.

2. Вторая интерпретация системы $PR1$ отличается от первой только тем, как интерпретируется символ R.

- R интерпретируется как «равняется или больше на 1».

Указанная интерпретация теореме $xPyRz$ ставит в соответствие истинное утверждение о целых положительных числах

$$«x + y = z + 1 \vee x + y = z»,$$

и поэтому данная интерпретация является моделью системы $PR1$. Более того, любое истинное утверждение

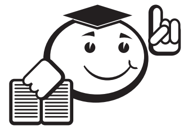
$$«x + y = z + 1 \vee x + y = z»$$

описывается в виде теоремы $xPyRz$ теории $PR1$. То есть теория с данной интерпретацией является полной.

3. В последней интерпретации символ R понимается снова по-другому.

- R интерпретируется как символ «$\geqslant$».

Указанная интерпретация теореме $xPyRz$ ставит в соответствие истинное утверждение о целых положительных числах «$x + y \geqslant z$», и поэтому данная интерпретация является моделью системы $PR1$. Но мы сейчас имеем существенное отличие от предыдущей интерпретации: не все истинные утверждения вида $x + y \geqslant z$ являются теоремами в $PR1$. Так, например, формула ${-}P{-}{-}R{-}$ имеет истинную интерпретацию $2 + 1 \geqslant 1$, но это не теорема.



Список литературы по модулю

[1] Хофштадтер Д. Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда / Д. Хофштадтер. — Самара : Изд. дом «Бахрах-М», 2001. — 752 с.