Модуль 5.1. Аксиоматическое построение математических теорий

> …эмпирические системы утрачивают свою актуальность, математические же — никогда. Их бессмертие — в их «пустоте».
>
> *Станислав Лем. Сумма технологии*

Человеческому мышлению свойственны мыслительные процессы двух видов: осознанные и неосознанные. Осознанные рассуждения допускают в большинстве случаев передачу другому лицу в письменном виде или в виде речи. В идеале читатель может понять их. Бессознательные процессы явно не осознаются, но иногда их результаты воспринимаются сознанием.

Если существуют бессознательные процессы мышления, то должны существовать и неосознанные «разумные принципы», регулирующие это мышление (ведь оно приводит не только к беспорядочным сновидениям, но и к разумному решению реальных проблем).

То же самое справедливо для математического мышления. Мы часто имеем дело с определенным комплексом бессознательных принципов, которые неосознанно регулируют наши рассуждения. Такие бессознательные регулирующие факторы, вырабатываемые в ходе интенсивных умственных занятий в определенной области, обычно называют ***интуицией***.

Общее биологическое развитие людей, взаимодействие в общем внешнем мире, общая культурная среда приводят к тому, что механизмы интуиции являются общими для большинства людей. Но одной интуиции недостаточно.

В процессе становления математики интуитивные представления уточнялись, и в результате появились строгие понятия и утверждения. В математике справедливость утверждений устанавливается с помощью доказательств.

Понятие математического доказательства исторически менялось. В Древнем Египте уже применялись правила для сложения и умножения целых положительных чисел и обратных им дробей. Также для нахождения площадей некоторых геометрически простых земельных участков применялись определенные правила. Но эти правила никак не обосновывались. Доказательством справедливости этих правил служил сам факт их наличия, факт того, что они были записаны.

В Древней Индии для доказательства нередко использовались математические рисунки. Доказательство теоремы, которую мы сейчас называем теоремой Пифагора, сводилось у индийского математика Бхаскары (1114–1185 гг.) к рисунку 1 с пояснением в одно слово «Смотри!»[1].

Современные доказательства опираются на аксиоматический метод[2]. Как говорилось в главе 2, уже в «Началах» Евклид использовал аксиоматический метод. Ак-

---

[1]Историки-математики считают, что Бхаскара выражал площадь квадрата, построенного на гипотенузе, как сумму площадей четырех треугольников $(4ab/2)$ и площади квадрата $(a-b)^2$. Следовательно: $c^2 = 4ab/2 + (a-b)^2$, потом $c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$ и, наконец, $c^2 = a^2 + b^2$.

[2]Кроме аксиоматичекого метода используется также генетический подход [1, с. 17–18]. В этом случае пытаются моделировать интуицию средствами другой теории (которая сама может также быть интуитивной).

сиоматический метод — это такой способ построения математической теории, при котором в основу кладутся основные положения теории, принимаемые без доказательства, а все остальные выводятся из них при помощи доказательств. Исходные положения называются ***аксиомами***, а те, которые из них выводятся, ***теоремами***.

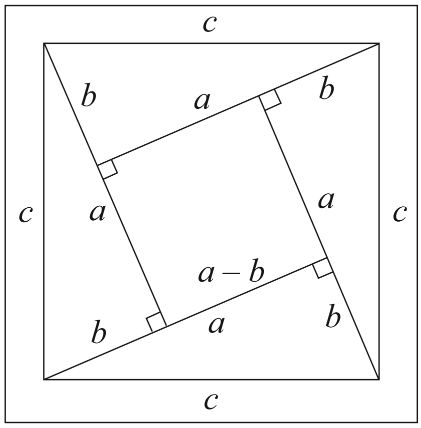

Рис. 1 – Доказательство Бхаскары

Остановимся на двух особенностях применения аксиоматического метода.

1. В «Началах» Евклида аксиомы — это очевидные истины, принимаемые без доказательства. В XIX веке это понятие сильно изменилось, потому что аксиомы перестали быть очевидными, они по-прежнему принимаются без доказательства, но могут быть в принципе совершенно произвольными утверждениями. За этим небольшим, на первый взгляд, изменением стоит достаточно радикальная смена философской позиции — отказ от признания одной-единственной возможной математической реальности[1].
2. Доказательства при аксиоматическом методе могут быть неформальными и формальными. Первое понятие — традиционное, и оно было единственным до становления математической логики. Наряду с неформальным, его можно назвать и психологическим доказательством, поскольку психологии в нем не меньше, чем математики.

Неформальное (содержательное, психологическое) доказательство *— это рассуждение, которое нас убеждает настолько в истинности некоторого высказывания, что мы можем после этого убедить других с помощью того же рассуждения.*

Примерами неформальных доказательств служат все доказательства, рассмотренные до этой главы.

Математическая логика уточнила (формализовала) понятие содержательного доказательства и выработала понятие формального доказательства. В отличие от

[1]См. неевклидову геометрию (параграф 5.5).

неформального аксиоматического метода формальный аксиоматический метод отличается тем, что совершенно четко определяет записанные в виде аксиом исходные положения, но и дозволенные способы рассуждений. Точно указываются допустимые логические переходы. Отметим, что все это определяется в виде синтаксических правил, поэтому формальные доказательства можно делать чисто механически, не вникая в их содержание. Проверять правильность формальных доказательств можно с помощью компьютера.

Неформальные доказательства можно записывать, используя любой естественный язык, формальные доказательства требуют только формального языка.

Формальные доказательства являются математическими объектами, следовательно, можно изучать математически формальные доказательства, что и делается в разделе математической логики, называемым теорией доказательств. Эти формализации психологических доказательств могут быть различными, но все они подчиняются некоторым общим требованиям. При радикальном применении формальных доказательств математика сводится к чистой логике, из нее изгоняются такие вещи, как интуиция, наглядные геометрические представления, индуктивные рассуждения и так далее.

Пример 1

Доказательство от противного (см. [2]). Пусть дано утверждение *B*. Надо доказать утверждение *A*.

При неформальном доказательстве из двух утверждений 1 и 2:

1) *B*;
2) из отрицания утверждения *A* следует отрицание утверждения *B* — вытекает утверждение *A*.

При формальном доказательстве указанное содержательное рассуждение начинается с записи утверждений *A* и *B* в виде формул A и B соответственно. После этого применяется правило: если доказаны формулы B и $\neg \mathsf{A} \supset \neg \mathsf{B}$, то считается доказанным и A.

Аксиоматический метод позволяет построить математические теории на четко выделенных математических утверждениях, из которых прочие получаются с помощью доказательств. Полученные таким образом математические теории называются аксиоматическими.

Создание формальных аксиоматических теорий возможно только при использовании ***формальных языков*** для записи на них доказываемых утверждений и самих доказательств. Обычно для этой цели широко используются языки первого порядка.

Но в любом случае в первую очередь задается синтаксис формального языка, который описывает построение правильных выражений (к ним относятся обычно термы, формулы, доказательства).

Как правило, формальный язык наделяется еще и семантической системой, или дедуктивной системой, или и той и другой.

***Семантическая система**, или просто семантика, какого-либо языка выделяет среди всех формул этого языка те, которые объявляются истинными; говорят также, что им приписываются значения **И**. Для этого обычно используется интерпретация правильных выражений языка.*

О формальных доказательствах можно говорить лишь тогда, когда утверждения, которые мы доказываем, и доказательства представляют собой тексты, организованные по совершенно точным синтаксическим правилам, т. е. записанные на формальном языке.

***Дедуктивная система** какого-либо языка выделяет среди всех формул те, которые объявляются доказуемыми. Обычно доказуемость задается индуктивно при помощи аксиом и правил вывода. Это делается так. Некоторые формулы объявляются аксиомами. Каждое **правило вывода** применяется к одной или нескольким формулам и указывает, как из этих формул можно получить новую формулу. **Доказуемыми формулами** называются все аксиомы и формулы, которые можно получить из доказуемых с помощью правил вывода. Доказуемые формулы, которые не являются аксиомами, называются **теоремами**.*

Замечание 1. Дедуктивная система задается таким образом, что для формального доказательства должны существовать:

1) алгоритм распознавания, является ли данная последовательность формул формальным доказательством;
2) алгоритм, который по данному формальному доказательству находит доказываемую формулу.

Рассмотрим два примера аксиоматической теории — серьёзный и несерьёзный [3]. В качестве несерьезного примера можно взять игру в шахматы — назовем это теорией ***Ch***. Формулами в ***Ch*** будем считать ***позиции*** (всевозможные расположения фигур на доске вместе с указанием «ход белых» или «ход черных»). В шахматах используется шахматная нотация, которая позволяет точно описать любую позицию. Введем дедуктивную систему. Аксиомой теории ***Ch*** естественно считать ***начальную позицию***, а правилами вывода — ***правила игры***, которые определяют, какие ходы допустимы в каждой позиции. Правила позволяют получать из одних формул другие. В частности, отправляясь от нашей единственной аксиомы, мы можем получать теоремы ***Ch***. Общая характеристика теорем ***Ch*** состоит, очевидно, в том, что это — всевозможные позиции, которые могут получиться, если передвигать фигуры, соблюдая правила. Запись в шахматной нотации партии мы можем рассматривать как доказательство теоремы — той позиции, в которой партия остановлена.

В чем выражается формальность теории $\boldsymbol{Ch}$? Если некто предлагает нам «математический текст» и утверждает, что это — доказательство теоремы A в теории $\boldsymbol{Ch}$, то ясно, что речь идет о непроверенной записи шахматной партии, законченной (или отложенной) в позиции A. Проверка не является, однако, проблемой: правила игры сформулированы настолько точно, что можно составить программу для компьютера, которая будет осуществлять такие проверки. (Еще раз напомним, что речь идет о проверке правильности записи шахматной партии, а не о проверке того, можно ли заданную позицию получить, играя по правилам, — эта задача намного сложнее!)

Несколько серьезнее другой пример формальной теории. Формулами в теории $\boldsymbol{L}$ являются всевозможные строки, составленные из букв a, b, например a, aa, aba, $abaab$. Дедуктивную систему теории определим следующим образом. Единственной аксиомой $\boldsymbol{L}$ является строка a, наконец, в $\boldsymbol{L}$ имеется два правила вывода:

$$\frac{X}{Xb} \quad \text{и} \quad \frac{X}{aXa}.$$

Такая запись означает, что в теории $\boldsymbol{L}$ из строки X непосредственно выводятся Xb и aXa. Примером теоремы $\boldsymbol{L}$ является строка $aababb$; вывод (доказательство) для нее есть

$$a,\ ab,\ aaba,\ aabab,\ aababb.$$

Аксиоматические теории являются не просто игрой ума, а всегда представляют собой модель какой-то реальности (либо конкретной, либо математической). Вначале математик изучает реальность, конструируя некоторое абстрактное представление о ней, т. е. некоторую аксиоматическую теорию. Затем он доказывает теоремы этой аксиоматической теории. Вся польза и удобство аксиоматических теорий как раз и заключаются в их абстрагировании от конкретной реальности. Благодаря этому одна и та же аксиоматическая теория может служить моделью многочисленных конкретных ситуаций. Наконец, он возвращается к исходной точке всего построения и дает интерпретацию теорем, полученных при формализации.

Список литературы по модулю

[1] Подниекс К. М. Вокруг теоремы Гёделя / К. М. Подниекс. — Рига, 1981.

[2] Успенский В. А. Апология математики / В. А. Успенский. — СПб. ; Амфора, 2009. — 554 с.

[3] Хофштадтер Д. Гёдель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда / Д. Хофштадтер. — Самара : Изд. дом «Бахрах-М», 2001. — 752 с.