ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 4. ЯЗЫКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Модуль 4.4. Формулы общезначимые, выполнимые, логически эквивалентные

Зюзьков Валентин Михайлович

Формула называется **общезначимой** (или **тождественно истинной**), если она истинна в любой интерпретации при любых значениях её свободных переменных.

Пример

Формула: $A \vee \neg A$.
Здесь A – произвольная формула языка первого порядка.

Тогда в любой интерпретации и при любых значениях свободных переменных одна из двух формул A и $\neg A$ имеет значение **И**.

Следовательно, формула $A \vee \neg A$ общезначима.

Пример

Формула $\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$ является общезначимой для произвольной формулы $A(x)$ с одной свободной переменной для любой сигнатуры Ω.

Действительно, возьмем произвольную интерпретацию сигнатуры Ω.

Имеется два варианта для этой интерпретации:

а) для любого значения переменной x значение формулы $A(x)$ есть **И**;

б) есть такое значение $x = c$, что значение формулы $A(c)$ есть **Л**.

В случае а) формулы $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ обе будут истинными, и импликация дает **И**.

В случае б) формула $\forall x A(x)$ имеет значение **Л**, и импликация снова дает **И**.

Пример

Формула $\forall x, y(F(x) \supset (F(x) \vee F(y)))$ является общезначимой для произвольной формулы $F(x)$ с одной свободной переменной для любой сигнатуры Ω.

Действительно, возьмем произвольную интерпретацию сигнатуры Ω с носителем D. Возьмем произвольные элементы $a, b \in D$, тогда формула $F(a) \supset (F(a) \vee F(b))$ истинна для любых истинностных значений $F(a)$ и $F(b)$.

Принцип пьяницы

Вопрос: существует ли в действительности такой человек, что если он пьет, то пьют все?

Рассмотрим универсум, состоящий из людей. Пусть предикат $P(x)$ обозначает свойство людей «x пьет».

Формула $\exists x(P(x) \supset \forall y P(y))$ истинна в данной интерпретации при любом распределении пьющих людей в универсуме.

Если в пропозициональную формулу – тавтологию – вместо всех пропозициональных переменных подставить какие-нибудь формулы языка первого порядка, то, очевидно, получим формулу языка первого порядка.

Будем называть такую формулу также **тавтологией**.

Теорема 1

Любая тавтология **общезначима.**

Формула называется **выполнимой**, если она истинна хотя бы в одной интерпретации при каких-то значениях переменной.

Формулы A и B называются **логически эквивалентными**, если формула $A \sim B$ общезначима. Если A и B логически эквивалентны, то будем писать $\boldsymbol{A \equiv B}$.

Теорема 2

Пусть даны пропозициональные формулы B и C с переменными $X_1, X_2, \dots, X_n$ и $A_1, A_2, \dots, A_n$ – формулы языка первого порядка.

Обозначим через $B(A_1, A_2, \dots, A_n)$ и $C(A_1, A_2, \dots, A_n)$ формулы, полученные подстановкой в B и C формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ вместо $X_1, X_2, \dots, X_n$ соответственно.

Тогда,

если $B \equiv C$, то $B(A_1, A_2, \dots, A_n) \equiv C\,(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Пусть Γ – произвольное множество замкнутых формул сигнатуры Ω.

Моделью множества Γ называется интерпретация сигнатуры Ω, в которой истинны все формулы из Γ.

Множество Γ называется **совместным** (выполнимым), если оно имеет хотя бы одну модель.

ТУСУР TUSUR UNIVERSITY

Благодарю за внимание!