ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 4. ЯЗЫКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Модуль 4.3. Интерпретация формул

Зюзьков Валентин Михайлович

Чтобы задать интерпретацию сигнатуры $\Omega = <\mathbf{Cnst}, \mathbf{Fn}, \mathbf{Pr}>$, нужно:

- фиксировать некоторое непустое множество D – носитель интерпретации (также называют универсумом);
- с каждой константой $c \in \mathbf{Cnst}$ сопоставить элемент $\underline{c} \in D$;
- с каждым k-местным функциональным символом $f \in \mathbf{Fn}$ сопоставить некоторую k-местную функцию $\underline{f}\colon D^k \to D$;
- с каждым k-местным предикатным символом $P \in \mathbf{Pr}$ сопоставить k-местный предикат $\underline{P}\colon D^k \to \{\textbf{И}, \textbf{Л}\}$.

Будем называть $\underline{c}$, $\underline{f}$, $\underline{P}$ интерпретациями соответственно константы c, функционального символа f и предикатного символа P.

Интерпретация предикатного символа '=' понимается всегда как отношение равенства элементов D.

Пример

Пусть $\Omega = <\{\mathbf{0}\},\ \{S, +, \times\},\ \{=\}>$ – сигнатура языка формальной арифметики.

Стандартная интерпретация языка формальной арифметики

- Носитель интерпретации – множество натуральных чисел $\mathbf{N}$; константа $\mathbf{0}$ интерпретируется как число 0.
- Функциональный символ S интерпретируется как $\underline{S}(x) = x + 1$.
- Поэтому термы, имеющие вид $S(\mathbf{0})$, $S(S(\mathbf{0}))$, $S(S(S(\mathbf{0})))$ и т. д., есть имена натуральных чисел 1, 2, 3 и т. д.
- Функциональные символы '$+$' и '$\times$' интерпретируются как операции сложения и умножения соответственно.
- Предикатный символ равенства '$=$' понимается как равенство натуральных чисел.
- Если t_1, t_2 – термы языка, то $t_1 = t_2$ – атомарная формула.
- Из атомарных формул с помощью логических связок и кванторов строятся более сложные формулы языка, причем $\exists x$ мы понимаем как «существует натуральное число», а $\forall x$ – как «для всех натуральных чисел».

Пример

Терм $S(\ldots S(\mathbf{0})\ldots)$, где символ S повторяется k раз, кратко будем обозначать $\boldsymbol{k}$.

Таким образом, натуральное число k именуется термом $\boldsymbol{k}$. Термы такого рода $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$,... принято называть нумералами — стандартными обозначениями конкретных натуральных чисел.

Очевидно, термы в этой интерпретации — это обозначения полиномов (от нескольких, вообще говоря, переменных) с натуральными коэффициентами.

Например, терм $\mathbf{(}(x \times x) + ((\mathbf{2} \times x) \times y)\mathbf{)} + (y \times y)$ представляет полином $x^2 + 2xy + y^2$.

Запись утверждений средствами языка элементарной арифметики

- «$x < y$» соответствует $\exists z\big(\neg(z = \mathbf{0})\ \&\ y = x + z\big)$;
- «x – четное число» соответствует $\exists y(x = y + y)$;
- «x – простое число» соответствует «$\mathbf{1} < x$» & & $\neg\exists y\exists z$(«$y < x$» & «$z < x$» & $x = y \times z$), где утверждения со знаком ‘<’ должны быть заменены соответствующими подформулами;
- «существует бесконечно много простых чисел» соответствует $\forall x\exists y$(«$x < y$» & «y – простое число») с уже введенными обозначениями для подформул.

Пример

Пусть $\Omega = <\{\varnothing\}, \varnothing, \{=, \in\}>$ – сигнатура языка теории множеств.
Пусть носитель интерпретации есть $\mathbf{R} \cup P(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ – множество вещественных чисел, а $P(\mathbf{R})$ – множество всех подмножеств множества $\mathbf{R}$.

Константа $\varnothing$ интерпретируется как пустое множество, функциональные символы отсутствуют, предикатный символ $\in$ интерпретируется как отношение принадлежности вещественного числа множеству.

Примеры формул этого языка:

- $\forall x(x \in A \supset x \in B)$. Эту формулу можно переписать в принятом виде $A \subseteq B$.
- $\neg(x = y)$ соответствует $x \neq y$.
- $\neg\exists x(x \in A)$ соответствует $A = \varnothing$.
- $\forall x(x \in A \ \& \ x \in B \sim x \in C)$ соответствует $A \cap B = C$.

Будем называть формулу **замкнутой**, если она не имеет свободных переменных.

Пусть A — замкнутая формула в языке первого порядка, и пусть задана некоторая интерпретация сигнатуры языка.

Тогда в данной интерпретации формула A не зависит от значений переменных (не имеет параметров) и имеет истинностное значение — оно называется **истинностным значением формулы A в данной интерпретации**.

ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Благодарю за внимание!