ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 4. ЯЗЫКИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Модуль 4.2. Термы и формулы

Зюзьков Валентин Михайлович

Язык первого порядка состоит из выражений, называемых термами и формулами.

Использование языка первого порядка для записи утверждений, относящейся к данной математической теории, становится возможным, если все основные понятия теории удается разбить на три категории: «объекты», «функции» и «предикаты».

Каждый язык первого порядка задается своей **сигнатурой** – тройкой множеств

$$\Omega = \langle \mathbf{Cnst}, \mathbf{Fn}, \mathbf{Pr} \rangle,$$

где

Cnst – множество констант;

Fn – множество функциональных символов;

Pr – множество предикатных символов.

- Каждая переменная есть терм.
- Каждая константа есть терм.
- Если f есть k-местный функциональный символ и $t_1, t_2,\ldots, t_k$ – термы, то выражение $f(t_1, t_2,\ldots, t_k)$ есть терм.

Пусть сигнатура языка содержит целые числа в качестве констант, двуместные функциональные символы ‘$+$’ и ‘$\times$’, и пусть x и y — переменные.

Тогда выражения

$-7 + x$, y, $((1 + 2) + (3 + 4)) \times (x + 10)$

есть термы.

Атомарные формулы определяются как выражения вида $P(t_1, t_2,\ldots, t_k)$, где P есть k-местный предикатный символ $(k \geq 1)$, а $t_1, t_2,\ldots, t_k$ – термы.

К атомарным формулам относятся и выражения вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы; ′$=$‘ — предикат «равенство».

Определение формул

- Каждая атомарная формула есть формула.
- Если A – формула, то выражение $\neg A$ есть формула.
- Если A и B – формулы, то выражения $(A \& B), (A \vee B), (A \supset B), (A \sim B)$ суть формулы.
- Если A – формула, x – переменная, то выражения $\forall x A$ и $\exists x A$ суть формулы.

Пример

Высказывание: «Григорий Чхартишвили и Борис Акунин — это один и тот же человек».

Пропозициональная логика: A.

Язык первого порядка:

«Григорий Чхартишвили» = «Борис Акунин».

Пример

Пусть сигнатура содержит целые числа в качестве констант, двуместные функциональные символы '$+$' и '$\times$' и предикатные символы — 'равенство', двуместный символ F и одноместный символ G.

Тогда следующие выражения являются формулами:

$$G(-7),$$

$$\forall x \exists y F(x, y \times (x + 10)),$$

$$\exists y((y = 1 + 2) \supset G(y + 2)),$$

$$\neg F(3 + 4, x \times x).$$

Пример

Высказывание:

«Если я прикажу генералу обратиться в чайку и он не сможет выполнить приказ, то виноват буду я, а не генерал».

(Сент-Экзюпери. Маленький принц)

Логика высказываний:

A: «Я приказываю генералу обратиться в чайку».

B: «Генерал выполняет приказ».

C: «Я виноват».

D: «Генерал виноват».

Формула: $(A \mathbin{\&} \neg B) \supset (C \mathbin{\&} \neg D)$.

Пример

Логика предикатов:

Универсум: *люди*.

Константы: *«Я»* и *«Генерал»*.

Предикат $A(x, y) \Leftrightarrow$ «человек x отдает приказ человеку y превратиться в чайку».

Предикат $B(x, y) \Leftrightarrow$ «человек x выполняет приказ человека y».

Предикат $C(x) \Leftrightarrow$ «человек x виноват».

Формула:

$$(A(Я, Генерал)\ \&\ \neg B(Генерал, Я)) \supset (C(Я)\ \&\ \neg C(Генерал)).$$

Пример

Высказывание:
«Если учиться и не думать – запутаешься, а если думать и не учиться – впадешь в сомнение». (Конфуций. Лунь юй)

Логика высказываний:

A: «Человек учится».
B: «Человек думает».
C: «Человек запутывается».
D: «Человек впадает в сомнение».

Формула: $(A \mathbin{\&} \neg B \supset C) \mathbin{\&} (\neg A \mathbin{\&} B \supset D)$.

Пример

Логика предикатов:

Универсум: *люди*.

Предикат $A(x) \Leftrightarrow$ «человек x учится».

Предикат $B(x) \Leftrightarrow$ «человек x думает».

Предикат $C(x) \Leftrightarrow$ «человек x запутывается».

Предикат $D(x) \Leftrightarrow$ «человек x впадает в сомнение».

Формула:

$$\forall x\big((A(x)\ \&\ \neg B(x)) \supset C(x)\big)\ \&\ \big((\neg A(x)\ \&\ \&\ B(x)) \supset D(x)\big).$$

Пример

Высказывание:

«Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

Логика высказываний:

A: «Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

Пример

Логика предикатов:

Три универсума: множество прямоугольных треугольников, множество отрезков прямых, множество положительных действительных чисел.

Предикат $A(t, x, y, z) \Leftrightarrow$ «отрезки x и y — катеты, а z — гипотенуза прямоугольного треугольника t».

Функция $d(x)$ вычисляет длину отрезка x.

Формула:

$\forall t, x, y, z(A(t, x, y, z) \supset d(x)^2 + d(y)^2 = d(z)^2)$.

Язык формальной арифметики предназначен для записи утверждений о натуральных числах.

Сигнатура языка содержит единственную константу 0 и три функциональных символа: одноместный S и двуместные '$+$' и '$\times$'.

Вместо $+(t_1, t_2)$ и $\times(t_1, t_2)$ принято писать $t_1 + t_2$ и $t_1 \times t_2$ соответственно.

Язык теории множеств имеет сигнатуру с двуместным предикатом $\in$ (подразумевается отношение принадлежности); обычно вместо $\in(x, A)$ пишут $x \in A$.

Единственной константой является $\varnothing$.

Благодарю за внимание!