Модули 4.5–4.6. Перевод с естественного языка на логический и обратно

Рассмотрим рекомендации и примеры перевода высказываний на русском языке на язык логики предикатов. Исходные высказывания большей частью не являются математическими. Обратный перевод также заслуживает внимания.

Правила для перевода

Если высказывание не является математическим, то, как правило, нет необходимости полностью определять сигнатуру языка, на который мы переводим высказывание[1]. Поэтому рекомендуется руководствоваться следующими правилами.

1. При решении задач на перевод сначала следует выбрать универсум, содержащий объекты (сущности), о которых говорится в высказывании. Выбор универсума в большинстве случаев не является однозначным, тогда надо руководствоваться дополнительно правилом 2. В некоторых случаях одним универсумом не обойтись.
2. Определяем предикатные символы для обозначения свойств объектов (одноместные предикаты) и/или отношений между объектами универсума (универсумов). Важно, чтобы определяемые вами предикаты имели смысл для всех элементов универсума. Кроме того, для каждого одноместного предиката множество значений этого предиката должно быть собственным непустым подмножеством универсума. Если это не так, то предикат не нужен, без него можно обойтись.
3. Определяем используемые термы. Для этого, при необходимости, вводим функциональные символы, и когда речь идет о конкретных объектах (указаны собственные имена), то вводим константы для обозначения этих объектов.
4. Элементарным (атомарным) высказываниям соответствуют атомарные формулы языка первого порядка. Это правило говорит о том, какие предикаты должны быть в получаемой формуле. Количество используемых предикатов, функциональных символов, констант следует минимизировать[2], но и не следует впадать в другую крайность, когда высказывание представляется одним многоместным предикатом.
5. В элементарном высказывании мы можем обнаружить кванторную конструкцию, тогда в соответствующей формуле используется квантор.
6. Если высказывание является сложным, то каждой пропозициональной связке в высказывании соответствует аналогичная связка в переводе.
7. В общем случае при переводе содержательного высказывания на формальный язык формула должна быть замкнутой, иначе она не имеет истинностного значения и мы не можем проверить перевод.

[1] Тем более что во многих случаях это было бы сделать затруднительно или невозможно.

[2] «Не следует создавать сущностей больше необходимого числа» — принцип «бритва Оккама». Оккам Уильям (ок. 1285–1349 гг.) — английский философ-схоласт, логик.

8. Если в высказывании говорится о нескольких свойствах объектов из универсума, то каждое свойство определяет соответствующее подмножество универсума. Далее мы можем при выборе пропозициональных связок руководствоваться соответствиями: пересечению подмножеств соответствует конъюнкция предикатов, объединению — дизъюнкция, включению подмножеств соответствует импликация предикатов.

Рассмотрим последнее правило подробнее.

Пусть U — универсум и $X_1 = \{x \in U \mid A(x)\}$, $X_2 = \{x \in U \mid B(x)\}$, где $A(x)$ и $B(x)$ — некоторые одноместные предикаты. Рассмотрим высказывание вида: «Все объекты x из U, обладающие свойством A, обладают свойством B». На языке множеств мы имеем $X_1 \subseteq X_2$, что мы можем представить на языке первого порядка формулой $\forall x\big(A(x) \supset B(x)\big)$.

При прежних обозначениях пусть имеется высказывание вида: «Есть объект x из U, обладающий свойствами A и B». На языке множеств мы имеем $X_1 \cap X_2, \neq \varnothing$, и мы пишем на языке первого порядка формулу $\exists x\big(A(x) \& B(x)\big)$.

Таким образом, имеем простые правила:

«Если A, то B» — пишем $\forall x\big(A(x) \supset B(x)\big)$;
«Некоторые A есть B» — пишем $\exists x\big(A(x) \& B(x)\big)$.

Пример 1

Некоторые свиньи не умеют летать.

Универсум: животные. Предикаты: $S(x) \equiv$ «x — свинья», $E(x) \equiv$ «x — умеет летать».

Формула: $\exists x\big(S(x) \& \neg E(x)\big)$.

Пример 2

Все дети не любят прилежно заниматься.

Универсум: люди. Предикаты: $B(x) \equiv$ «x — ребенок», $L(x) \equiv$ «x — любит прилежно заниматься».

Формула: $\forall x\big(B(x) \supset \neg L(x)\big)$.

«Многоэтажные» кванторы. Дополнительные ограничения

Рассмотрим утверждение: «Все бешеные собаки смертельно опасны». Здесь говорится, что если данное нам животное x — собака, и причем бешеная, то x — смертельно опасное. Следовательно, если предикат $D(x)$ означает «животное x — собака», предикат $M(x)$ означает «животное x — бешеное», а предикат $Z(x)$ — «x — смертельно опасное», то формальная запись этого утверждения имеет вид

$$\forall x\big(D(x)\ \&\ M(x) \supset Z(x)\big).$$

Аналогично утверждение «Некоторые старательные студенты получают стипендию» можно записать в виде

$$\exists x\big(P(x)\ \&\ S(x)\ \&\ O(x)\big),$$

где $P(x)$ означает «x — студент»; $S(x)$ означает «x — старательный»; $O(x)$ — «x — получает стипендию».

Итак, если на значения переменной накладываются сразу несколько ограничений, то все они перечисляются через &, а затем надстраивается ограниченный квантор по обычным правилам.

Теперь рассмотрим утверждение: «произведение двух чисел, отрицательного и положительного, является отрицательным». Пусть универсум составляет множество вещественных чисел, а предикаты используем в традиционной записи: $x < 0$ (число x отрицательно), $x > 0$ (число x положительно). Произведение двух чисел представим традиционным термом. Тогда высказывание имеет несколько эквивалентных форм, все они допустимы. Выберем два варианта[1]:

$$\forall x\big(x < 0 \supset \forall y(y > 0 \supset x \times y < 0)\big),$$
$$\forall x \forall y(x < 0\ \&\ y > 0 \supset x \times y < 0).$$

Хоть эти две формы и эквивалентны, но вторая, пожалуй, несколько выразительнее и яснее подчеркивает равноправие двух чисел. Для последней формулы можно использовать сокращение

$$\exists x, y(x < 0\ \&\ y > 0 \supset x \times y < 0),$$

т. е. несколько однородных кванторов соединяются в один. Заметим, что в исходном высказывании не присутствуют явно слова («все», «любые» и т. п.), которые бы указывали о необходимости квантора общности, но мы должны его использовать, исходя из смысла высказывания и учитывая правило 7 для перевода.

Перевод утверждения «для всякого целого числа есть меньшее целое» можно записать следующим образом:

$$\forall x\big(x \in \mathbf{Z} \supset \exists y(y \in \mathbf{Z}\ \&\ y < x)\big). \tag{1}$$

Заметим, что это утверждение удобнее писать, начиная с внутреннего квантора, т. е. сначала перевести, что означает «Для x есть меньшее его натуральное число», а затем расшифровать начало предложения: «для всякого x».

При переводе утверждений с вложенными кванторами необходимо тщательнейшим образом следить за порядком кванторов и их областью действия. Например, если утверждение (1), конечно же, истинно, то утверждение

$$\exists y\big(y \in \mathbf{Z}\ \&\ \forall x(x \in \mathbf{Z} \supset y < x)\big)$$

ложно. Оно выражает утверждение естественного языка «Существует наименьшее целое число». В самом деле, прочтем его. Читать также начинают изнутри. Внутри у нас говорится, что всякое целое число x больше y. А какое y? Пока неопределено,

[1]Какие еще варианты возможны?

но, переходя к началу формулы, мы видим, что y должно быть предварительно выбрано. Но какое бы целое число y ни выбрали, внутреннее утверждение будет ложно. Следовательно, такого y не существует.

Из этого примера виден и способ чтения формальных выражений. Мы начинаем с внутренних кванторов и, прочитав утверждение «начерно», в неестественных для естественного языка формах типа «для всех x, таких, что..., существует y, такое, что...», стремимся переформулировать полученное предложение более кратко и более красиво, более выразительно. При этом по возможности изгоняется упоминание о тех переменных, которые в формальном выражении были связаны. Упоминание же о тех переменных, которые были свободны, по которым кванторов навешено не было, обязательно остается.

Например, выражение

$$\exists z(z \in \mathbf{R} \mathbin{\&} x < z \mathbin{\&} z < y)$$

можно прочитать как «Существует действительное число z, такое, что x меньше z, а z меньше y», и переформулировать начисто: «Между x и y есть действительное число».

И наконец, рассмотрим утверждение: «Для любого целого числа есть большее и меньшее его целые числа». Это утверждение можно представить в виде формулы:

$$\forall x \exists y, z(x \in \mathbf{Z} \supset y \in \mathbf{Z} \mathbin{\&} y > x \mathbin{\&} z \in \mathbf{Z} \mathbin{\&} z < x),$$

но лучше всего перевод:

$$\forall x\big(x \in \mathbf{Z} \supset \exists y(y \in \mathbf{Z} \mathbin{\&} y > x) \mathbin{\&} \exists z(z \in \mathbf{Z} \mathbin{\&} z < x)\big),$$

где каждый квантор относится лишь к тем утверждениям, которые он связывает.

Выводы

- Если предложение достаточно сложное, его перевод на формальный язык лучше всего писать изнутри, начиная с самой главной части данного предложения.
- Порядок кванторов часто имеет решающее значение.
- Не стесняйтесь гнаться за выразительностью: это окупается.
- При переводе на формальный язык нужно по мере возможности уменьшать области действия кванторов, чтобы каждый из них не включал в свою область утверждения, не говорящие о связываемой переменной.
- При чтении сложной формулы начинайте изнутри. Если затруднительно сразу понять ее смысл, сначала прочитайте ее начерно, а затем начисто, изгоняя явное упоминание кванторов и связанных переменных.
- Свободные переменные должны входить в окончательную словесную формулировку утверждений.

Единственность и неединственность

При изложении этого пункта следуем [1].

Исключительно важную роль в языке математики играет утверждение единственности x, удовлетворяющего данному условию A (например, часто приходится доказывать, что решение задачи единственно).

На самом деле обычно подразумевается не только то, что решение задачи единственно, но и то, что она имеет решение, т. е. доказывается не только единственность, а существование и единственность объекта, удовлетворяющего свойству A. При аккуратных формулировках это необходимо оговаривать.

Единственность «в чистом виде» выражается следующим образом:

$$\forall x, y\ (A(x)\ \&\ A(y) \supset x = y).$$

Заметим, что утверждение «x, удовлетворяющее A, единственно», вообще говоря, *не предполагает, что оно существует*, что задача вообще имеет решение. Чисто формально, предыдущая формула истинна и в том случае, когда x, удовлетворяющих A, вообще нет. Поэтому эту формулу точнее читать «есть не более одного x, удовлетворяющего $A(x)$».

А утверждение «существует единственное x, такое, что $A(x)$» выражается в форме

$$\exists x A(x)\ \&\ \forall x, y\big(A(x)\ \&\ A(y) \supset x = y\big).$$

Но это не самая выразительная запись утверждения о единственности. Гораздо выразительнее $\exists x \forall y (A(y) \supset x = y)$.

Итак, то, что существует единственное x, удовлетворяющее $A(x)$, означает, что условие $A(x)$ на самом деле сводится к равенству этому единственному x.

В задачах, где идет речь о количестве каких-то объектов, следует использовать предикат равенство.

Общий способ получить утверждение «существует не более n таких x, что $A(x)$»:

$$\exists x_1, \ldots, x_n\big(\forall y\ (A(y) \sim x_1 = y \vee \ldots \vee x_n = y)\big).$$

Но здесь мы не утверждаем, что этих различных x ровно n: если x и y обозначены по-разному, то это отнюдь не означает, что они принимают различные значения: они имеют право принимать разные значения, но имеют право принять и одинаковые.

Итак, мы приходим к необходимости уметь формулировать различие. Если $x = y$ означает равенство, неразличимость, совпадение предметов, то соответственно $\neg(x = y)$, обычно обозначаемое $x \neq y$, — их различие. Итак, сказать, что есть не менее двух различных решений задачи, очень просто:

$$\exists x, y\big(x \neq y\ \&\ A(x)\ \&\ A(y)\big).$$

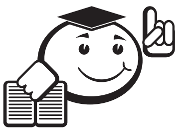
Так же просто сказать и то, что их ровно два:

$$\exists x, y\Big(x \neq y\ \&\ \forall z\big(A(z) \sim z = x \vee z = y\big)\Big).$$

А вот как записывается, что решений не более двух:

$$\forall x, y, z \Big(x \neq y \ \& \ x \neq z \ \& \ y \neq z \supset \neg \big(A(x) \ \& \ A(y) \ \& \ A(z) \big) \Big).$$

Подобным образом можно написать формулы и для большего числа решений.



Список литературы по модулям

[1] Непейвода Н. Н. Прикладная логика : учеб. пособие / Н. Н. Непейвода. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.