Модуль 4.4. Формулы общезначимые, выполнимые, логически эквивалентные

Введем некоторые термины, которые часто будем использовать в дальнейшем.

Формула называется ***общезначимой*** *(или* ***тождественно истинной****), если она истинна в любой интерпретации при любой ее оценке.*

Пример 1

Пусть A — произвольная формула языка первого порядка. Тогда в любой интерпретации и на любой оценке одна из двух формул A и $\neg A$ имеет значение **И**. Следовательно, формула $A \vee \neg A$ общезначима.

Пример 2

Формула $\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$ является общезначимой для произвольной формулы $A(x)$ с одной свободной переменной для любой сигнатуры Ω. Действительно, возьмем произвольную интерпретацию φ сигнатуры Ω. Имеется два варианта для этой интерпретации:

а) на любой оценке $v(x)$ значение формулы $A\big(v(x)\big)$ есть **И**;

б) есть такая оценка $v(x) = c$, что значение формулы $A(c)$ есть **Л**.

В случае а) формулы $\forall x A(x)$ и $\exists x A(x)$ обе будут истинными и импликация дает **И**.

В случае б) формула $\forall x A(x)$ имеет значение **Л** и импликация снова дает **И**.

Пример 3

Формула $\forall x, y\big(A(x) \supset A(x) \vee A(y)\big)$ является общезначимой для произвольной формулы $A(x)$ с одной свободной переменной для любой сигнатуры Ω. Действительно, возьмем произвольную интерпретацию φ сигнатуры Ω с носителем D. Возьмем произвольные элементы $a, b \in D$ (мы не исключаем случай $a = b$), тогда формула $A(a) \supset A(a) \vee A(b)$ истинна для любых истинностных значений $A(a)$ и $A(b)$.

Пример 4

Принцип пьяницы

Знаменитый американский математик, автор множества логических задач, Рэймонд Смаллиан в своей книге [1, с. 226–228] описал знаменитый «Принцип пьяницы», который звучит так:

«Человек сидит у стойки в баре. Внезапно он ударяет кулаком по стойке и приказывает бармену: «Налей-ка мне и налей всем. Когда пью я, пьют все. Такой уж я человек!» Все выпивают, настроение у посетителей бара повышается.

Через какое-то время человек, сидящий у стойки, снова ударяет кулаком по стойке и заплетающимся языком отдает бармену распоряжение: «Налей мне еще и налей всем еще по одной. Когда я пью еще одну, все пьют еще по одной! Такой уж я человек!» Все выпивают еще по одной, и настроение в баре повышается еще больше.

Затем человек, сидящий у стойки, кладет на нее деньги и говорит: «А когда я плачу, платят все. Такой уж я человек!».

Вопрос: существует ли в действительности такой человек, что если он пьет, то пьют все?

Мы приведем формулу, которая дает положительный ответ на этот вопрос.

Рассмотрим универсум, состоящий из людей. Пусть предикат $P(x)$ обозначает свойство людей: «x пьет». Рассмотрим формулу:

$$\exists x\big(P(x) \supset \forall y P(y)\big).$$

Эта формула истинна в данной интерпретации при любом распределении пьющих людей в универсуме.

Действительно, любая оценка переменных означает соответствующее распределение пьющих людей. Возможно два варианта: а) все люди обладают свойством P и б) есть люди, которые не пьют. Если для любого человека m значение предиката $P(m)$ равно **И**, то формулы $\forall y P(y)$ и $P(m) \supset \forall y P(y)$ имеют значение истина, и, следовательно, переходя к квантору, $\exists x\big(P(x) \supset \forall y P(y)\big)$ имеет значение **И**. Пусть в случае б) человек m не пьет, тогда $P(m)$ ложно, но импликация $P(m) \supset \forall y P(y)$ имеет значение **И**. Снова заключаем, что формула $\exists x\big(P(x) \supset \forall y P(y)\big)$ имеет значение **И**.

В нашем примере с пьяницей мы нигде не использовали специфики интерпретации, поэтому произвольная формула $A(x)$, выражающая некоторое свойство элементов носителя интерпретации, дает общезначимую формулу:

$$\exists x\,\big(A(x) \supset \forall y\, A(y)\big).$$

В главе 4 было введено понятие тавтологии как пропозициональной формулы, которая превращается в истинное высказывание при любой подстановке в нее конкретных высказываний вместо пропозициональных переменных.

Если в пропозициональную формулу вместо всех пропозициональных переменных подставить какие-нибудь формулы языка первого порядка, то, очевидно, получим формулу языка первого порядка. Будем называть такую формулу также ***тавтологией***. Выше рассмотренный пример 1 демонстрирует одну из таких тавтологий — $A \vee \neg A$.

Теорема 1. Любая тавтология общезначима.

Доказательство. Пусть $B(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — пропозициональная формула с переменными $X_1, X_2, \ldots, X_n$, а $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — произвольные формулы языка первого порядка. Обозначим через $B(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ формулу, полученную подстановкой в $B(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вместо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно. Выберем произвольную интерпретацию и оценку языка первого порядка, тогда каждая формула $A_1, A_2, \ldots, A_n$ будет иметь некоторое истинностное значение. Следовательно, мы можем получить истинностное значение формулы $B(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, такое же, как значение формулы $B(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, где истинностные значения переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ совпадают с истинностными значениями формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответственно. Но формула $B(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет значение **И**, следовательно, значение формулы $B(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ также **И**.

Вышерассмотренные примеры 2–3 показывают, что общезначимые формулы не только те формулы, которые могут быть получены из тавтологий пропозициональной логики.

Формула называется ***выполнимой****, если она истинна хотя бы в одной интерпретации при хотя бы одной ее оценке.*

При заданной интерпретации истинностное значение замкнутой формулы постоянно на любой оценке, поэтому для замкнутой формулы можно просто говорить о выполнимости формулы A в интерпретации φ; факт выполнимости для замкнутых формул принято обозначать $\varphi \vDash A$.

Пример 5

Рассмотрим формулу $\exists x A(x) \vee \exists y A(y)$. Эта формула выполнима, но не общезначима. Выберите подходящие интерпретации для доказательства.

Формулы A и B называются ***логически эквивалентными****, если формула $A \sim B$ общезначима. Если A и B логически эквивалентны, то будем писать $A \equiv B$.*

Теорема 2. Пусть даны пропозициональные формулы B и C с переменными $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы языка первого порядка. Обозначим через $B(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ и $C(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ формулы, полученные подстановкой в B и C формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вместо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно. Тогда, если $B \equiv C$, то $B(A_1, A_2, \ldots, A_n) \equiv C(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Доказательство. Так как $B \equiv C$ в логике высказываний, то $B \sim C$ — пропозициональная тавтология, следовательно, по теореме 1, формула $B(A_1, A_2, \ldots, A_n) \equiv C(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ является общезначимой, что и требовалось доказать.

Следующее утверждение не следует из теоремы 2.

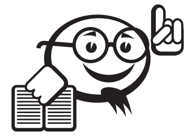
Теорема 3 [2, с. 39–40]. Какие бы ни были формулы A и B, справедливы следующие утверждения о логической эквивалентности.

1. Если B не содержит свободных вхождений переменной x, то
   а) $\exists x(A\&B) \equiv \exists xA\&B$;
   б) $\forall x(A\&B) \equiv \forall xA\&B$;
   в) $\forall x(A \vee B) \equiv \forall xA \vee B$;
   г) $\exists x(A \vee B) \equiv \exists xA \vee B$.
2. $\exists x(A \vee B) \equiv \exists xA \vee \exists xB$.
3. $\forall x(A\&B) \equiv \forall xA\&\forall xB$.
4. $\neg\exists xA \equiv \forall x\neg A$.
5. $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$.
6. Если $A(x)$ не содержит y, то
   а) $\forall xA(x) \equiv \forall yA(y)$;
   б) $\exists xA(x) \equiv \exists yA(y)$.

Доказательство следующих теорем смотрите в [2, с. 40–41].

Теорема 4. Пусть A произвольная формула, а $B \equiv C$. Тогда

1) $A\&B \equiv A\&C$; 5) $A \sim B \equiv A \sim C$;
2) $A \vee B \equiv A \vee C$; 6) $\neg B \equiv \neg C$;
3) $A \supset B \equiv A \supset C$; 7) $\exists xB \equiv \exists xC$;
4) $B \supset A \equiv C \supset A$; 8) $\forall xB \equiv \forall xC$.



Теорема 5. Пусть A произвольная формула, а $B \equiv C$. Пусть A_1 получена из A заменой некоторых вхождений формулы B на C. Тогда $A \equiv A_1$.

В языках первого порядка по определению существует предикат равенство «=». Причем общепринято предполагать, что этот предикат обладает следующим свойством[1].

Если A — произвольная формула языка первого порядка, то формула:

$$\forall x, y\Big(x = y \supset \big(A(x) \supset A(y)\big)\Big)$$

общезначима.

Другими словами, свойства равных объектов эквивалентны. В математических утверждениях можно заменить равные объекты друг на друга, и мы получим эквивалентное рассуждение. Например, утверждение, говорящее о числе «4», мы можем заменить эквивалентным утверждением, говорящим о выражении «2 + 2». Но в программировании не всегда так. Например, если программная переменная x имеет значение 4, то нельзя все вхождения x заменить числом 4.

Еще одно свойство равенства:

$$\forall x(x = x),$$

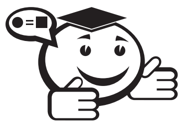
т. е. каждый объект равен самому себе.

Из этих двух свойств равенства выводятся другие законы равенства, например:

$$\forall x, y, z(x = y \mathbin{\&} y = z \supset x = z);$$
$$\forall x, y(x = y \supset y = x);$$
$$\forall x, y, z(x = y \mathbin{\&} x = z \supset y = z).$$

Докажем для образца первое из этих равенств: если первый предмет равен второму, а второй — третьему, то первый предмет равен третьему. В самом деле, пусть при конкретных произвольных x, y, z выполнено $x = y$ и $y = z$. Тогда по основному свойству равенства в $x = y$ можно y заменить на z и получим $x = z$, что и требовалось доказать.

Выразимость



Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — формула сигнатуры Ω со свободными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, φ — интерпретация сигнатуры Ω с носителем D, а R есть n-местный предикат на D. Говорят, что формула A ***выражает*** *предикат R в интерпретации φ, если $R(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$* ***И*** *тогда и только тогда, когда $\varphi \vDash A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ для любых значений $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из D переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.*

[1] Отношение равенства с перечисленными здесь свойствами используется не только в языках первого порядка — оно повсеместно встречается в математике.

Предикат R называется ***выразимым*** *в интерпретации φ, если существует формула, его выражающая.*
Множество $B \subset D$ называется ***выразимым****, если существует одноместный выразимый предикат P, что $b \in B$ тогда и только тогда, когда $P(b) =$* ***И****.*

Пример 6

Возьмем стандартную интерпретацию языка элементарной арифметики $<\{\mathbf{0}\}, \{S, +, \times\}, \{=\}>$. Формула $\exists y(y = S(x + x))$ выражает предикат «y — нечетно». Формула $\exists z(y = x + z)$ выражает предикат «$x \leqslant y$». Предикат $x = 0$ можно выразить двумя разными формулами: $x = \mathbf{0}$ и $x + x = x$.

Существуют ли невыразимые в $\mathbf{N}$ множества при стандартной интерпретации элементарной арифметики? Из мощностных соображений следует, что существуют. Формул языка первого порядка лишь счетное число (параграф 5.2), а подмножеств $\mathbf{N}$ — континуум. Поскольку каждое подмножество $D \subset \mathbf{N}$ определяет соответствующий предикат $P(x) = \{x \mid x \in D\}$, то различных предикатов тоже континуум; следовательно, существуют и невыразимые предикаты.

Теорема 6. Пусть D — носитель интерпретации языка первого порядка с произвольной сигнатурой Ω. Имеем следующие свойства выразимых в D множеств.

1. Если $A \subset D$ и $B \subset D$, то $A \cap B$ выразимо.
2. Если $A \subset D$ и $B \subset D$, то $A \cup B$ выразимо.
3. Если $A \subset D$ выразимо, то $D \backslash A$ выразимо.

Доказательство. Действительно, если формулы P и Q со свободными переменными y и z выражают множества A и B соответственно, то формула $P\&Q$, в которой все свободные вхождения y и z заменены на x, выражает множество $A \cap B$. Утверждения 2 и 3 доказываются аналогично.

Логическое следование

Для пропозициональной логики мы ввели понятие логического следования. Приспособим это определение к исчислению предикатов.

Пусть Γ — произвольное множество замкнутых формул сигнатуры Ω. ***Моделью*** *множества Γ называется интерпретация φ сигнатуры Ω, в которой истинны все формулы из Γ. Множество Γ называется* ***совместным*** *(выполнимым), если оно имеет хотя бы одну модель.*

Пример 7

Множество формул $\{\forall x, y(x = y), \exists z, y(P(z)\ \&\ \neg P(y))\}$ несовместно потому, что любая модель в качестве носителя имеет одноэлементное множество и вторая формула всегда ложна.

Будем говорить, что замкнутая формула A сигнатуры Ω ***логически следует*** *(семантически следует или просто следует) из Γ, и писать $\Gamma \vDash A$, если A истинна во всех моделях множества Γ. В этом случае будем также говорить, что A является* ***логическим следствием*** *множества формул Γ.*

Пустое множество совместно, и его моделью является любая интерпретация, поэтому $\varnothing \vDash A$ выполнено тогда и только тогда, когда A — общезначимая формула. Обычно для общезначимых формул пишут просто $\vDash A$.

Теорема 6. Пусть Γ — некоторое множество замкнутых формул сигнатуры Ω, A и B — замкнутые формулы сигнатуры Ω. Тогда

а) $\Gamma \vDash A$ и $\Gamma \vDash B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vDash A \& B$.

б) $\Gamma \cup \{A\} \vDash B$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vDash A \supset B$.

в) $\Gamma \vDash A$ тогда и только тогда, когда множество $\Gamma \cup \{\neg A\}$ несовместно.

Доказательство смотрите, например, в [2, с. 58–59].

Множество Γ замкнутых формул сигнатуры Ω будем называть ***семантически полным****, если Γ совместно и для любой замкнутой формулы A сигнатуры Ω выполнено $\Gamma \vDash A$ или $\Gamma \vDash \neg A$.*

Пример 8

Пусть сигнатура не содержит никаких констант, функциональных и предикатных символов (равенство присутствует). Рассмотрим одноэлементное множество $\Gamma = \{\forall x, y(x = y)\}$ формул этой сигнатуры. Это множество семантически полно, поскольку все его модели — одноэлементные множества, и любая замкнутая формула либо истинна, либо ложна в этой модели.

Список литературы по модулю

[1] Смаллиан Р. Как же называется эта книга? / Р. Смаллиан. — М. : Издательский Дом Мещерякова, 2007. — 272 с.

[2] Успенский В. А. Вводный курс математической логики / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, В. Е. Плиско. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 128 с.