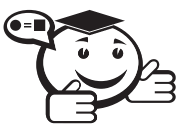
Модуль 4.3. Интерпретация формул

Пусть имеется некоторый язык первого порядка с сигнатурой Ω. Формулы и термы этого языка, по определению сигнатуры Ω — это всего лишь некоторые последовательности символов алфавита языка. Никакого другого смысла пока в них нет. Однако после того как мы определенным образом интерпретируем эти символы, выбрав некоторую предметную область D, каждая замкнутая формула языка получит определенное истинное истинностное значение и, следовательно, оно превратится в некое высказывание, имеющее отношение к элементам рассматриваемой области D.

В отличие от языка пропозициональной логики, где под интерпретацией понимается просто приписывание истинностных значений пропозициональным переменным, в логике языка первого порядка задание интерпретации предполагает наличие, прежде всего, некоторого непустого множества D (называемого в дальнейшем *носителем интерпретации*[1]), на котором и интерпретируются символы этого языка. Содержательно — это множество тех объектов, свойства отношений между которыми мы собираемся выражать и изучать в подходящим образом выбранном языке первого порядка.

Для пропозициональной формулы, задав интерпретацию переменных, мы получаем интерпретацию всей формулы. Точно также мы будем поступать и в случае формул языка первого порядка. Нам надо определить, что означает интерпретация атомарной формулы.

Перейдем теперь к точным формулировкам.



*Чтобы задать **интерпретацию** сигнатуры* $\Omega = \langle \mathbf{Cnst}, \mathbf{Fn}, \mathbf{Pr} \rangle$, *нужно*

1) *фиксировать некоторое непустое множество D — носитель интерпретации (также называют универсумом);*
2) *с каждой константой $c \in \mathbf{Cnst}$ сопоставить элемент $\overline{c} \in D$;*
3) *с каждым k-местным функциональным символом $f \in \mathbf{Fn}$ сопоставить некоторую k-местную функцию $\overline{f}\colon D^k \to D$;*
4) *с каждым k-местным предикатным символом $P \in \mathbf{Pr}$ сопоставить k-местный предикат $\overline{P}\colon D^k \to \{\boldsymbol{И}, \boldsymbol{Л}\}$.*

*Если P есть 0-местный предикатный символ, то с ним сопоставляется одно из двух истинностных значений **И** или **Л**.*

Будем называть $\overline{c}, \overline{f}, \overline{P}$ интерпретациями соответственно константы c, функционального символа f и предикатного символа P.

[1] Если интерпретация известна, то тогда носитель интерпретации называют также *универсумом*.

Интерпретация предикатного символа «=» понимается всегда как отношения равенства элементов D.
Универсум D объявляется областью возможных значений для каждой переменной.

Пример 1

Пусть $\Omega = <\{\mathbf{0}\}, \{S, +, \times\}, \{=\}>$ — сигнатура языка элементарной арифметики. Рассмотрим следующую интерпретацию.

Носитель интерпретации — множество натуральных чисел **N**; константа **0** интерпретируется как число 0. Функциональный символ S интерпретируется как $\overline{S}(x) = x + 1$, с привычной точки зрения $S(x)$ — это следующее за x натуральное число. Поэтому термы, имеющие вид $S(\mathbf{0})$, $S(S(\mathbf{0}))$, $S(S(S(\mathbf{0})))$ и т. д., есть имена натуральных чисел 1, 2, 3 и т. д. Функциональные символы + и × интерпретируются как операции сложения и умножения соответственно. Язык элементарной арифметики использует только предикатный символ равенства «=» (понимаемый как равенство натуральных чисел). Если t_1, t_2 — термы языка, то $t_1 = t_2$ — атомарная формула. Из атомарных формул с помощью логических связок и кванторов строятся более сложные формулы языка, причем $\exists x$ мы понимаем как «существует натуральное число», а $\forall x$ — как «для всех натуральных чисел».

Терм $S(\ldots S(\mathbf{0})\ldots)$, где символ S повторяется k раз, кратко будем обозначать $\boldsymbol{k}$. Таким образом, натуральное число k именуется термом $\boldsymbol{k}$. Термы такого рода $\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$ принято называть ***нумералами*** — стандартными обозначениями конкретных натуральных чисел. Очевидно, термы в этой интерпретации — это обозначения полиномов (от нескольких, вообще говоря, переменных) с натуральными коэффициентами. Например, терм

$$\Big((x \times x) + \big((\mathbf{2} \times x) \times y\big)\Big) + (y \times y)$$

представляет полином $x^2 + 2xy + y^2$.

Средствами языка элементарной арифметики легко записываются простейшие утверждения о свойствах натуральных чисел, например:

1) «$x < y$» соответствует $\exists z(\neg(z = \mathbf{0})\ \&\ y = x + z)$;
2) «x — четное число» соответствует $\exists y(x = y + y)$;
3) «x — простое число» соответствует

$$«\mathbf{1} < x»\ \&\ \neg\exists y \exists z(«y < x»\ \&\ «z < x»\ \&\ x = y \times z),$$

где утверждения со знаком «<» должны быть заменены соответствующими подформулами;

4) «существует бесконечно много простых чисел» соответствует

$$\forall x \exists y(«x < y»\ \&\ «y \text{ — простое число»})$$

с уже введенными обозначениями для подформул.

Эта интерпретация называется ***стандартной интерпретацией языка элементарной арифметики***.

Пример 2

Сигнатура $\Omega = <\{\mathbf{0}\}, \{S, +, \times\}, \{=\}>$ остается прежней, но интерпретацию изменим.

Носителем интерпретации является множество простых чисел, и $\mathbf{0}$ интерпретируется как первое простое число 2. Терм $S(x)$ интерпретируется как простое число, следующее за простым числом x. Поэтому термы, имеющие вид $S(\mathbf{0})$, $S(S(\mathbf{0}))$, $S(S(S(\mathbf{0})))$ и т. д., есть имена простых чисел 3, 5, 7 и т. д. Терм $S(\ldots S(\mathbf{0})\ldots)$, где символ S повторяется k раз, кратко будем обозначать $\boldsymbol{k}$. В этом случае термы $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$,… именуют подряд идущие простые числа 3, 5, 7, 11,…

Функциональные символы + и × интерпретируются более сложно, чем просто сложение и умножение. Пусть p_n обозначает n-е по счету простое число, например $p_5 = 13$.

1. Тогда $\overline{+(t_1, t_2)}$ — это простое число с номером $k + m$, если интерпретация термов t_1 и t_2 дает простые числа p_k и p_m.
2. Тогда $\overline{\times(t_1, t_2)}$ — это простое число с номером $k \times m$, если интерпретация термов t_1 и t_2 дает простые числа p_k и p_m.

Например, $\mathbf{0} \times (\mathbf{1} + \mathbf{2})$ интерпретируется как простое число 13, имеющее номер $5 = 1 \times (2 + 3)$. При такой интерпретации формула $x + \mathbf{0} = y$ утверждает, что x и y — простые числа-близнецы.

Эта интерпретация не имеет названия и не используется.

Пример 3

Пусть $\Omega = <\{\varnothing\}, \varnothing, \{=, \in\}>$ — сигнатура языка теории множеств. Пусть носитель интерпретации состоит из всех подмножеств множества $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Константа $\varnothing$ интерпретируется как пустое множество, функциональные символы отсутствуют, и предикатный символ $\in$ интерпретируется как отношение принадлежности элемента множеству.

Примеры формул этого языка:

1) $\forall x(x \in A \supset x \in B)$. Эту формулу можно переписать в принятом виде $A \subseteq B$;

2) $\neg(x = y)$ соответствует $x \neq y$;

3) $\neg\exists x(x \in A)$ соответствует $A = \varnothing$;

4) $\forall x(x \in A \;\&\; x \in B \sim x \in C)$ соответствует $A \cap B = C$.

Пусть задана интерпретация языка первого порядка. Можно ли считать, что при этом каждая формула становится именем некоторого высказывания? Другими словами, можно ли при задании интерпретации каждой формулы языка каким-то разумным способом приписать некоторое истинностное значение? Интуитивно ясно, что если формула замкнута, то она превращается в высказывание, и это высказывание имеет истинностное значение **И** или **Л**. Но в общем случае ответ будет отрицательным, поскольку формула может содержать свободные переменные, и пока этим свободным переменным не будут приписаны определенные значения из носителя интерпретации, говорить о каком-либо истинностном значении данной формулы не имеет смысла.

Чтобы придать вышесказанному точный смысл, мы вводим понятие оценки.

Пусть D — носитель интерпретации. ***Оценкой*** в этой интерпретации называется любое отображение

$$v : X \to D,$$

ставящее в соответствие каждой переменной данного языка некоторый элемент из носителя интерпретации. Элемент $v(x_i) \in D$ мы будем называть ***значением переменной*** x_i ***на оценке*** v.

Для любого терма оценка переменных, используя подстановку значений переменных в терм, однозначно дает значение терма — элемент из носителя интерпретации.

Например, при стандартной интерпретации языка элементарной арифметики и оценке $v(x) = 4$, $v(y) = 2$ терм $\big((x \times x) + \big((\mathbf{2} \times x) \times y\big) + (y \times y)\big)$ имеет в качестве значения натуральное число 36.

Интуитивно ясно, что любая формула при фиксированных интерпретации и оценке имеет истинностное значение. Рассмотрим примеры формул в стандартной интерпретации языка элементарной арифметики.

1. $\exists y(\mathbf{0} = y \times \mathbf{2})$. При оценке $v(y) = 1$ формула $\mathbf{0} = y \times \mathbf{2}$ является ложной. При оценке $v(y) = 0$ формула $\mathbf{0} = y \times \mathbf{2}$ является истинной, и поэтому формула $\exists y(\mathbf{0} = y \times \mathbf{2})$ имеет истинностное значение **И**.
2. $\forall x \exists y(x = y{+}y)$. При оценке $v(x) = 2$, $v(y) = 2$ формула $x = y{+}y$ имеет значение **Л**. При оценке $v(x) = 2$, $v(y) = 1$ формула $x = y + y$ имеет значение **И**, следовательно, формула $\exists y(x = y + y)$ имеет значение **И**. Рассмотрим теперь различные оценки, в которых $v(x) = 3$. Перебирая различные значения для y, мы получаем каждый раз, что формула $x = y + y$ имеет значение **Л**. Это позволяет нам высказать гипотезу, что формула $\mathbf{3} = y + y$ для всех y имеет ложное значение, откуда должна следовать ложность исходной формулы $\forall x \exists y(x = y + y)$. Но эта гипотеза требует доказательства.

Более строгое, с техническими подробностями, формальное определение истинностного значения формулы можно найти в различных классических учебниках (см., например, [1]).

Имеет место следующее утверждение (см., например, [1]).

Пусть A — замкнутая формула в языке первого порядка и φ — некоторая интерпретация сигнатуры языка. Тогда на любой оценке в данной интерпретации формула A имеет одно и тоже истинностное значение — оно называется ***истинностным значением формулы*** $\boldsymbol{A}$ ***в интерпретации*** φ.

Список литературы по модулю

[1] Колмогоров А. Н. Математическая логика / А. Н. Колмогоров, А. И. Драгалин. — 3-е изд. — М. : КомКнига, 2006. — 240 с.