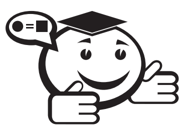
Модуль 4.2. Термы и формулы

Языки первого порядка в первую очередь используются для записи математических утверждений, причем для каждой конкретной области математики, или, как говорят, математической теории, выбирается подходящий язык. Использование языка первого порядка для записи утверждений, относящихся к данной математической теории, становится возможным, если все основные понятия теории удается разбить на три категории: «объекты», «функции» и «предикаты». При этом функции и предикаты должны быть определены только на объектах, а значениями функций являются только объекты. В частности, не допускается рассматривать предикаты, заданные на функциях, или функции, заданные на предикатах[1]. Затем для некоторых конкретных, замечательных в том или ином отношении объектов, функций и предикатов фиксируются их обозначения, которые и образуют сигнатуру языка.



Каждый язык первого порядка задается своей ***сигнатурой*** *— тройкой множеств* $\Omega = \langle \mathbf{Cnst}, \mathbf{Fn}, \mathbf{Pr} \rangle$*, где*

1) **Cnst** — *множество* ***констант****;*
2) **Fn** — *множество* ***функциональных символов****;*
3) **Pr** — *множество* ***предикатных символов****.*

При этом с каждым функциональным или предикатным символом однозначно связано некоторое натуральное число — количество аргументов (или ***местность****,* ***арность****) этого символа. Арность функционального символа положительна, а предикатные символы могут быть нульместными.*

Во всяком языке первого порядка имеется счетный набор переменных. Условимся считать, что в качестве переменных во всех языках первого порядка используются строчные буквы из конца латинского алфавита, возможно с числовыми индексами.

Язык первого порядка с сигнатурой Ω будем называть языком Ω. Язык состоит из выражений, называемых термами и формулами. При этом термы играют роль имен и именных форм, а формулы роль высказываний и высказывательных форм.

Определение ***терма*** носит индуктивный характер и содержит три пункта. Первые два пункта являются базисом индукции и указывают, какие объекты языка следует непосредственно считать термами. Третий пункт представляет собой шаг индукции и задает порождающее правило, позволяющее уже из построенных термов построить новый терм.

[1]Из-за этих ограничений язык называется языком *первого* порядка.

1. *Каждая переменная есть терм.*
2. *Каждая константа есть терм.*
3. *Если f есть k-местный функциональный символ и $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — термы, то выражение $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ есть терм.*

Пример 1

Пусть сигнатура содержит целые числа в качестве констант, двуместные функциональные символы + и ×, и пусть x и y — переменные. Тогда выражения

$$-7 + x,\ y,\ \big((1+2)+(3+4)\big) \times (x+10)$$

суть термы. Заметим, что функциональные символы + и × в данном случае пишутся в инфиксной форме (между аргументами).

Атомарные *(или* ***элементарные****) формулы определяются как выражения вида $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, где P есть k-местный предикатный символ ($k \geqslant 1$), а $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — термы. Всякий 0-местный предикатный символ также считается атомарной формулой. Кроме того, имеется предикатный символ '=', обозначающий предикат «****равенство****» и используемый в инфиксном виде. Таким образом, к числу атомарных формул относятся и выражения вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 — термы.*

Формулы *определяются индуктивно с помощью следующих четырех пунктов, причем первый пункт представляет из себя базис индукции, а остальные три пункта суть порождающие правила.*

1. *Каждая атомарная формула есть формула.*
2. *Если A — формула, то выражение $\neg A$ есть формула.*
3. *Если A и B — формулы, то выражения $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \sim B)$ суть формулы.*
4. *Если A — формула, x — переменная, то выражения $\forall x A$ и $\exists x A$ суть формулы.*

Пусть дан язык первого порядка с некоторой сигнатурой Ω. При построении формул языка используются следующие непересекающиеся множества символов: **Cnst** — множество констант, **Fn** — множество функциональных символов, **Pr** — множество предикатных символов, множество переменных, $\{\&, \vee, \supset, \sim, \neg, \forall, \exists\}$ — множество логических связок и множество, состоящее из двух круглых скобок и запятой. Объединение этих шести множеств называется ***алфавитом*** данного языка.

В любом языке первого порядка имеется только счетное число формул. Действительно, любая формула — это конечная последовательность символов из счетного алфавита, а таких последовательностей счетное число.

Пример 2

Высказывание «Григорий Чхартишвили и Борис Акунин — это один и тот же человек» в пропозициональной логике мы могли представить только в виде пропозициональной переменной. На языке первого порядка мы можем использовать равенство с константами

'Григорий Чхартишвили' = 'Борис Акунин'.

Пример 3

Пусть сигнатура содержит константы, функциональные символы и переменные такие же, как в примере 1. А среди предикатных символов присутствует двуместный символ f и одноместный символ g. Тогда следующие выражения являются формулами:

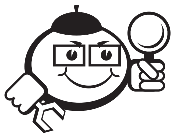
$$g(-7), \quad f\big(x, y\times(x+10)\big), \quad y = 1+2, \quad g(y+2), \quad f(3+4, x\times x).$$

Заметим, что пропозициональные формулы отличаются от формул языка первого порядка видом атомарных формул и кванторы могут присутствовать только в формулах языка первого порядка. Мы распространяем на формулы языков первого порядка те же соглашения об «экономии» скобок, которые действуют и для формул пропозициональной логики (глава 4).

В формулах вида $\forall x A$ и $\exists x A$ выражение $\forall x$ и $\exists x$ называется ***кванторной приставкой***, а формула A — ***областью действия*** соответствующего квантора.

В соответствии с общим введением понятий свободной и связанной переменной (глава 3, параграф 3.1) вхождение переменной x в формулу называется связанным, если оно находится в области действия квантора $\forall x$ или $\exists x$ или входит в кванторную приставку. Вхождение переменной, не являющееся связанным, называется свободным. Формула, не содержащая свободных переменных, называется ***замкнутой***.

Рассмотрим сложные высказывания на естественном (русском) языке и покажем, что языки первого порядка более точно по сравнению с пропозициональными формулами записывают эти высказывания (сигнатуру языка мы полностью не определяем).



Пример 4

1. Если я прикажу генералу обратиться в чайку и он не сможет выполнить приказ, то виноват буду я, а не генерал (Сент-Экзюпери. Маленький принц).

Решение.

Логика высказываний:

A: *«Я приказываю генералу обратиться в чайку».*

B: *«Генерал выполняет приказ».*

C: *«Я виноват».*

D: *«Генерал виноват».*

Формула: $(A\&\neg B) \supset (C\&\neg D)$.

Логика предикатов:

Универсум: люди. «*Я*» и «*Генерал*» — константы.

Предикат $A(x, y) \Leftrightarrow$ «человек x отдает приказ человеку y превратиться в чайку».

Предикат $B(x, y) \Leftrightarrow$ «человек x выполняет приказ человека y».

Предикат $C(x) \Leftrightarrow$ «человек x виноват».

Формула: $\big(A(Я, Генерал)\ \&\ \neg B(Генерал, Я)\big) \supset \big(C(Я)\ \&\ \neg C(Генерал)\big)$.

2. Если учиться и не думать — запутаешься, а если думать и не учиться — впадешь в сомнение (Конфуций. Лунь юй).

Решение.

Логика высказываний:

A: *«Человек учится».*

B: *«Человек думает».*

C: *«Человек запутывается».*

D: *«Человек впадает в сомнение».*

Формула: $(A\&\neg B \supset C)\&(\neg A\&B \supset D)$.

Логика предикатов:

Универсум: люди.

Предикат $A(x) \Leftrightarrow$ «человек x учится».

Предикат $B(x) \Leftrightarrow$ «человек x думает».

Предикат $C(x) \Leftrightarrow$ «человек x запутывается».

Предикат $D(x) \Leftrightarrow$ «человек x впадает в сомнение».

Формула: $\forall x\Big(\big(A(x)\ \&\ \neg B(x)\big) \supset C(x)\Big)\ \&\ \forall x\Big(\big(\neg A(x)\ \&\ B(x)\big) \supset D(x)\Big)$.

Приведем два языка первого порядка, играющие наиболее важную роль в математике и логике.

Язык элементарной арифметики предназначен для записи утверждений о натуральных числах. Сигнатура языка содержит единственную константу $\mathbf{0}$ и три функциональных символа: одноместный S и двуместные $+$ и $\times$. Вместо $+(t_1, t_2)$ и $\times(t_1, t_2)$ принято писать $t_1 + t_2$ и $t_1 \times t_2$ соответственно. Подразумеваемый смысл введенных символов описан в следующем параграфе.

Язык теории множеств имеет сигнатуру с двуместным предикатом $\in$ (подразумевается отношение принадлежности); обычно вместо $\in(x, A)$ пишут $x \in A$. Единственной константой является $\varnothing$. Смотрите пример 3 в следующем параграфе.