Модуль 4.1. Предикаты и кванторы

Элементарные высказывания с точки зрения пропозициональной логики характеризуются только истинностными значениями и являются неделимыми конструкциями. Но логиков во многих случаях интересует и внутренняя структура простых предложений: *что* и *о чем* говорится в данном предложении. С точки зрения грамматики естественного языка, *субъект* (или подлежащее) — это то, о чем или о ком говорится в предложении, а *предикат* (называемый также сказуемым или группой сказуемого) выражает то, что говорится о субъекте. В математической логике произвольную высказывательную форму со свободными переменными называют также предикатом. Если мы заменим свободные переменные, входящие в эту форму, на имена объектов универсума, то получим некоторое отношение между этими объектами, которое, в зависимости от конкретных объектов-параметров, будет истинным или ложным высказыванием.

Таким образом, со всяким предикатом, понимаемым как высказывательная форма, естественным образом связана функция, которая каждому набору значений параметров сопоставляет истинное или ложное высказывание. Если мы не будем различать высказывания, имеющие одно и то же истинностное значение, то придем к следующему определению: k-местным ***предикатом*** на универсуме M называется произвольная функция

$$P : M^k \to \{\mathbf{И}, \mathbf{Л}\}.$$

Пример 1

Пусть универсум — множество натуральных чисел $\mathbf{N}$. Определим одноместный предикат P: $\mathbf{N} \to \{\mathbf{И}, \mathbf{Л}\}$, так что $P(n) = \mathbf{И}$ тогда и только тогда, когда n есть простое число.

Пример 2

Пусть универсум есть произвольное множество M, элементы которого сами являются множествами. Определим двуместный предикат A: $M^2 \to \{\mathbf{И}, \mathbf{Л}\}$, так что $A(X, Y) = \mathbf{И}$ тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$.

В математике чаще всего встречаются одноместные и двуместные (***бинарные***) отношения. Бинарные отношения обычно записываются между своими аргументами, например $4 < 7$, $x^2+2x+1 > 0$ и т. д. Одноместные отношения в математике часто записываются при помощи символа $\in$ и символа для множества объектов, обладающих данным свойством. Например, утверждение «π — действительное число» записывается в виде $\pi \in \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ обозначает множество действительных чисел. Но в логике для единообразия мы пользуемся предикатной записью $P(t_1, \ldots, t_n)$, чтобы обозначить высказывание, образованное применением n-местного отношения P к предметам $t_1, \ldots, t_n$. В такой записи $2 = 4$ выглядит следующим образом: $=(2, 4)$.

«Предикат» и «отношение» соотносятся как имя и предмет, им обозначаемый. Но в математике эти два понятия употребляются почти как синонимы. В логических материалах мы будем пользоваться строгим термином «предикат», а в конкретных приложениях, когда это вошло в математическую традицию, использовать и слово «отношение» (например, говорить об отношении «>» в формуле $a > b$).

Вообще, всякий раз, когда речь идет о «свойствах» объектов (пример 1) или «отношениях» между ними (пример 2), свойства и отношения можно представлять как соответствующие предикаты.

Логические операции, называемые *кванторами*, позволяют из данного предиката получать предикат с меньшим числом параметров, в частности из одноместного предиката получается высказывание.

Квантор «для всех»

Пусть $A(x)$ — предикат с одним параметром, тогда высказывание «для всех x верно $A(x)$» символически записывается $\forall x A(x)$. Символ $\forall$ называется ***квантором всеобщности*** (или ***универсальным квантором***). Эта же связка используется при переводе утверждений:

«A верно при любом значении x»,
«для произвольного x имеет место $A(x)$»,
«каково бы ни было x, $A(x)$»,
«для каждого x (верно) $A(x)$»,
«всегда имеет место $A(x)$»,
«каждый обладает свойством A»,
«свойство A присуще всем»
и т. п.

Утверждение $\forall x A(x)$ истинно тогда и только тогда, когда $A(x)$ истинно при любом фиксированном значении x. Утверждение $\forall x A(x)$ ложно тогда и только тогда, когда имеется хоть один предмет c из нашего универсума (другими словами, хотя бы одно значение x), такой, что $A(c)$ ложно.

В том случае, когда универсум содержит бесконечное множество значений, нет никакой переборной процедуры, которая помогла бы проверить истинность $\forall x A(x)$; только математическое доказательство позволяет нам единым образом обозреть все это бесконечное множество и получить точный ответ.

Квантор «существует»

Пусть $A(x)$ — предикат с одним параметром, тогда высказывание «существует такое x, что $A(x)$» символически записывается $\exists x A(x)$. Знак $\exists$ называется ***квантором существования***. Эта же связка применяется при переводе утверждений:

«$A(x)$ верно при некоторых x»,
«$A(x)$ иногда верно»,
«есть такое x, при котором $A(x)$»,
«можно найти такое x, при котором $A(x)$»,
«у некоторых вещей есть признак A»,
«по крайней мере один объект есть A»
и т. п.

Высказывание $\exists x A(x)$ истинно, если в нашем универсуме найдется хотя бы одно значение c, при котором $A(c)$ истинно. $\exists x A(x)$ ложно, если при любом значении c ложно $A(c)$.

Нахождение истинностного значения $\exists x A(x)$ также может составлять проблему. Например, натуральное число n называется совершенным, если сумма его делителей (исключая самого n) равна n. Например, 6 — совершенное число, так как $6 = 1 + 2 + 3$. Проблема «существует ли нечетное совершенное число?» стоит со времен античности, и не видно способа ее решить.

Заметим, что утверждение $\exists x A(x)$ не отрицает того, что $\forall x A(x)$. И конечно, кванторы $\exists$ и $\forall$ всегда употребляются вместе с переменной и заставляют ее пробегать весь универсум.

Для предикатов с несколькими параметрами $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n > 1$ применение квантора общности или существования по любой переменной связывает эту переменную и создает предикат с числом параметров, меньшим на единицу. Например, рассмотрим высказывательную форму $x \geqslant 0 \supset x = y^2$, которую обозначим в виде предиката $P(x, y)$. Тогда мы можем создать предикат с одной свободной переменной $\exists y P(x, y)$ и, применяя еще один квантор, получаем (истинное) высказывание $\forall x \exists y P(x, y)$. Отметим, что мы можем получить еще 7 различных высказываний, меняя кванторы, их порядок и связывая квантором разные переменные.

Применение логического языка в теории множеств

Покажем, как простое использование логических операций и предикатов дает более точное и краткое описание понятий и рассуждений в теории множеств. Например, для доказательства основных тождеств алгебры множеств (теорема 1 из главы 3) можно использовать логические равносильности.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ (дистрибутивность } \cup \text{ относительно } \cap).$$

Имеем $A \cup (B \cap C) = \{x \mid x \in A \cup (B \cap C)\}$ = (по определению объединения и пересечения множеств) $\{x \mid x \in A \vee (x \in B \,\&\, x \in C)\}$ = (дистрибутивность $\vee$ относительно &) $\{x \mid (x \in A \vee x \in B) \,\&\, (x \in A \vee x \in C)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B \text{ (законы де Моргана).}$$

Имеем $\neg(A \cup B) = \{x \mid x \in \neg(A \cup B)\}$ = (по определению дополнения и объединения) $\{x \mid x \in U \,\&\, \neg(x \in A \vee x \in B)\}$ = (закон де Моргана для $\vee$) $\{x \mid x \in U \,\&\, \neg(x \in A) \,\&\, \neg(x \in B)\}$ = (определение дополнения) $\{x \mid x \in \neg A \,\&\, x \in \neg B\} = \neg A \cap \neg B$.

Следующие утверждения были приведены в главе 3, но без обоснования. Теперь мы можем воспользоваться свойствами импликации.

Замечание 1. Транзитивность описывается формулой:

$$\forall x \forall y \forall z(\langle x, y\rangle \in \rho \,\&\, \langle y, z\rangle \in \rho \supset \langle x, z\rangle \in \rho).$$

Если для отношения ρ вообще не существует таких x, y и z, чтобы выполнялось $\langle x, y\rangle \in \rho \,\&\, \langle y, z\rangle \in \rho$, то импликация истинна и, следовательно, отношение транзитивно.

Замечание 2. Антисимметричность описывается формулой:

$$\forall x \forall y(\langle x, y\rangle \in \rho \,\&\, \langle y, x\rangle \in \rho \supset x = y).$$

Если для отношения ρ вообще не существует таких x и y, чтобы выполнялось $\langle x, y\rangle \in \rho$ & $\langle y, x\rangle \in \rho$, то импликация истинна и, следовательно, отношение антисимметрично.

Мы привели примеры использования логического языка в «наивной» теории множеств. Но чтобы доказательства в теории множеств стали более строгими и не приводили к парадоксам, необходимо ввести специальный язык первого порядка (см. главу 6, параграф 6.7).