ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 3. ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ЛОГИКА (ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ)

Модуль 3.5. Равносильности

Зюзьков Валентин Михайлович

Формулы A и B называются **равносильными**, если эти формулы принимают одинаковые истинностные значения в любой интерпретации. Равносильность формул обозначается как $\boldsymbol{A \equiv B}$.

Замечание

Из определений тавтологии и равносильности сразу следует, что $A \equiv B$ тогда и только тогда, когда $\models A \sim B$.

Пример

Рассмотрим формулы $\neg X \vee \neg Y$ и $\neg(X \,\&\, Y)$.

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$\neg X \vee \neg Y$	$X \,\&\, Y$	$\neg(X \,\&\, Y)$
И	И	Л	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	И	Л	И
Л	И	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	И	И	Л	И

Столбцы пятый и седьмой совпадают, поэтому
$\neg X \vee \neg Y \equiv \neg(X \,\&\, Y)$.

Теорема 1

Пусть формулы A и B равносильны, причем $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – список всех переменных, входящих в A или в B. Пусть формулы D и E получены из A и B одновременной подстановкой формул $C_1, C_2, \ldots, C_n$ вместо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно. Тогда $D \equiv E$.

Теорема 2.
Основные равносильности

Для любых формул A, B, C справедливы следующие равносильности:

1. $A \& B \equiv B \& A$ (коммутативность &).
2. $A \& A \equiv A$ (идемпотентность &).
3. $A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$ (ассоциативность &).
4. $A \vee B \equiv B \vee A$ (коммутативность $\vee$).
5. $A \vee A \equiv A$ (идемпотентность $\vee$).
6. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ (ассоциативность $\vee$).
7. $A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C)$ (дистрибутивность $\vee$ относительно &).
8. $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$ (дистрибутивность & относительно $\vee$).
9. $A \& (A \vee B) \equiv A$ (первый закон поглощения).
10. $A \vee (A \& B) \equiv A$ (второй закон поглощения).
11. $\neg\neg A \equiv A$ (закон снятия двойного отрицания).
12. $\neg(A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (первый закон де Моргана).
13. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$ (второй закон де Моргана).
14. $A \equiv (A \& B) \vee (A \& \neg B)$ (первый закон расщепления).
15. $A \equiv (A \vee B) \& (A \vee \neg B)$ (второй закон расщепления).
16. $A \sim B \equiv (A \supset B) \& (B \supset A) \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$.
17. $A \supset B \equiv \neg A \vee B \equiv \neg (A \& \neg B)$.
18. $A \vee B \equiv \neg A \supset B \equiv \neg (\neg A \& \neg B)$.
19. $A \& B \equiv \neg (A \supset \neg B) \equiv \neg (\neg A \vee \neg B)$.
20. $A \supset B \equiv \neg B \supset \neg A$ (закон контрапозиции).

Пример

Докажем равносильность №7 (дистрибутивность $\vee$ относительно &) с помощью таблицы истинности.

A	B	C	$B \& C$	$A \vee (B \& C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
и	и	и	и	и	и	и	и
и	и	л	л	и	и	и	и
и	л	и	л	и	и	и	и
и	л	л	л	и	и	и	и
л	и	и	и	и	и	и	и
л	и	л	л	л	и	л	л
л	л	и	л	л	л	и	л
л	л	л	л	л	л	л	л

Доказательство первого закона де Моргана

$$\neg(A \mathbin{\&} B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

Пусть на некотором наборе истинностных значений переменных формула $\neg(A \mathbin{\&} B)$ принимает значение **Л**.

Тогда формула $A \mathbin{\&} B$ принимает значение **И**, а поэтому обе формулы A и B принимают значение **И**.

Но в этом случае, очевидно, и правая часть равносильности №12 принимает значение **Л**.

И наоборот, пусть формула $\neg A \vee \neg B$ принимает значение **Л**.

Тогда формулы $\neg A$, $\neg B$ принимают значение **Л**, а формулы A, B – значение **И**.

Очевидно, что и левая часть равносильности принимает значение **Л**.

Теорема 3. Правило равносильных преобразований

Пусть C_A – формула, содержащая A в качестве своей подформулы.

Пусть C_B получается из C_A заменой A в этом вхождении на B.

Тогда, если $A \equiv B$, то $C_A \equiv C_B$.

И алгебра высказываний, и алгебра множеств – это различные варианты математической структуры, называемой **булевой алгеброй**.

Благодарю за внимание!