ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 3. ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНАЯ ЛОГИКА (ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ)

Модуль 3.4. Тавтологии

Зюзьков Валентин Михайлович

Формула называется **выполнимой**, если существует интерпретация, в которой эта формула истинна.

Формула называется **опровержимой**, если существует интерпретация, в которой эта формула ложна.

Формула A называется **тавтологией** (или **тождественно истинной**), если формула истинна во всех интерпретациях.

В этом случае мы будем использовать обозначение $\models A$.

Формула называется **противоречием** (или **тождественно ложной**), если формула ложна во всех интерпретациях.

Следствия из определений:

- A – тавтология тогда и только тогда, когда A не является опровержимой;
- A – тождественно ложна тогда и только тогда, когда A не является выполнимой;
- A – тавтология тогда и только тогда, когда $\neg A$ – тождественно ложна;
- A – тождественно ложна тогда и только тогда, когда $\neg A$ – тавтология.

Теорема. Подстановка вместо пропозициональных переменных

Пусть A – формула, в которую входят только пропозициональные переменные $X_1, X_2,\ldots, X_n$, а B – формула, полученная из A одновременной подстановкой формул $C_1, C_2,\ldots, C_n$ вместо $X_1, X_2,\ldots, X_n$ соответственно.

Если A – тавтология (противоречие), то B – тавтология (противоречие) соответственно.

Логические законы

1. $\models A \vee \neg A$ (закон исключенного третьего или tertium nondatur).
2. $\models A \supset A$.
3. $\models A \supset (B \supset A)$.
4. $\models (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$ (цепное рассуждение).
5. $\models (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.
6. $\models (A \,\&\, B) \supset A$; $(A \,\&\, B) \supset B$.
7. $\models A \supset (B \supset (A \,\&\, B))$.
8. $\models A \supset (A \vee B)$; $B \supset (A \vee B)$.
9. $\models (\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.
10. $\models ((A \supset B) \supset A) \supset A$ (закон Пирса).
11. $\models \neg(B \,\&\, \neg B)$ (закон противоречия).
12. $\models (A \supset B) \vee (B \supset A)$.

Пример №1

Является ли формула $((P \supset Q) \,\&\, P) \supset Q$ тавтологией?

$((P \supset Q) \,\&\, P) \supset Q = $ **Л**	
$(P \supset Q) \,\&\, P = $ **И**	$Q = $ **Л**
$P \supset Q = $ **И**, $P = $ **И**	
И $\supset Q = $ **И** (подставили в формулу **И** вместо P)	
$Q = $ **И**	

Получили противоречие ($Q = $ **И** и $Q = $ **Л** одновременно), следовательно, исходное предположение о ложности $((P \supset Q) \,\&\, P) \supset Q$ неверно, и получаем $\models ((P \supset Q) \,\&\, P) \supset Q$.

Пример №2

Является ли тавтологией формула
$((P \supset Q)\ \&\ (\neg R \supset \neg Q)\ \&\ (T \supset \neg R)) \supset (P \supset \neg T)$?

$((P \supset Q)\ \&\ (\neg R \supset \neg Q)\ \&\ (T \supset \neg R)) \supset (P \supset \neg T)$ = **Л**	
$(P \supset Q)\ \&\ (\neg R \supset \neg Q)\ \&\ (T \supset \neg R)$ = **И**	$P \supset \neg T$ = **Л**
$P \supset Q$ = **И**, $\neg R \supset \neg Q$ = **И**, $T \supset \neg R$ = **И**	P = **И**, $\neg T$ = **Л**
И $\supset Q$ = **И**, $\neg R \supset \neg Q$ = **И**, **И** $\supset \neg R$ = **И** (подставили в формулы **И** вместо P и T)	
Q = **И**, $\neg R$ = **И**, $\neg R \supset \neg Q$ = **И**	
И $\supset \neg$**И** = **И** (подставили в формулы **И** вместо Q и $\neg R$)	
И $\supset$ **Л** = **И**. Но это невозможно!	

Пришли к противоречию, следовательно, исходная формула – тавтология.

Пример №3

Является ли формула $((P \supset Q) \,\&\, P) \supset (Q \supset \neg P)$ тавтологией?

$((P \supset Q) \,\&\, P) \supset (Q \supset \neg P) =$ **Л**	
$(P \supset Q) \,\&\, P =$ **И**	$Q \supset \neg P =$ **Л**
$P \supset Q =$ **И**, $P =$ **И**	$Q =$ **И**, $\neg P =$ **Л**
И $\supset Q =$ **И** (подставили в формулу **И** вместо P)	
$Q =$ **И**	

Получили значения переменных ($Q =$ **И** и $P =$ **И**), при которых формула ложна, следовательно, эта формула не является тавтологией.

ТУСУР TUSUR UNIVERSITY

Благодарю за внимание!