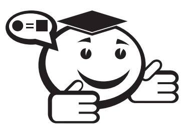
Модуль 3.3. Язык логики высказываний

Рассмотренные нами логические понятия служат основой для превращения логики в математическую науку. Будем записывать высказывания в символическом виде. Для этого введем искусственный язык — *язык логики высказываний*.

Алфавит языка состоит из трех множеств.

1. Для обозначения логических операций (также называемых логическими связками) используются пять символов: ¬ («отрицание»), ∧ («конъюнкция»), ∨ («дизъюнкция»), ⊃ («импликация»), ~ («эквиваленция»). Последние четыре символа называются ***бинарными*** логическими операциями, а первая логическая операция называется ***унарной***.
2. Счетное множество символов, называемых ***пропозициональными переменными*** (или ***высказывательными переменными***), мы будем изображать большими латинскими буквами, возможно, с индексами — натуральными числами, например $Q, R, X, Y, Z, P, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$
3. Две скобки «(», «)», соответственно называемые ***левая*** и ***правая***, будут использоваться для пунктуации.

Как видно из определения, алфавит содержит счетное множество символов.

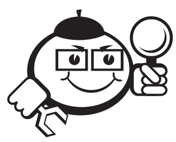


*Понятие «**пропозициональная формула**» определяется следующими индуктивными правилами, с помощью которых мы создаем новые формулы из уже построенных формул:*

- F_0*: Каждая пропозициональная переменная есть формула.*
- F_1*: Если* A *есть формула, то* $\neg A$ *— также формула.*
- F_2, F_3, F_4, F_5*: Если* A *и* B *— формулы, то* $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \sim B)$ *— также формулы.*

Для любых формул A и B будем называть формулу $\neg A$ *отрицанием формулы* A и соответственно формулы $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \supset B)$, $(A \sim B)$ будут называться *конъюнкцией*, *дизъюнкцией*, *импликацией* и *эквиваленцией формул* A и B. В импликации $(A \supset B)$ формулу A называют посылкой, а B — заключением.

Мы будем использовать в формулах большие латинские буквы, иногда с нижними индексами.



Пример 1

$$A,\ C \sim \neg C,\ \neg\Big(C \supset \big(X_1 \& (B \vee X_2)\big)\Big).$$

Таким образом, мы определили ***язык логики высказываний****: это упорядоченная пара <**A**, **F**>, где* ***A*** *— алфавит логики высказываний,* ***F*** *— формулы логики высказываний.*

Когда мы, например, пишем формулу $\neg\left(C \supset \left(X_1 \wedge (B \vee X_2)\right)\right)$, то предполагаем, что C, X_1, X_2, B — пропозициональные переменные, именующие какие-то высказывания. Если же формула имеет вид

$$\neg\left(\mathsf{C} \supset \left(\mathsf{X}_1 \wedge (\mathsf{B} \vee \mathsf{X}_2)\right)\right), \tag{1}$$

то тогда предполагаем, что C, X_1, X_2, B — произвольные формулы[1], каждая из которых может совпадать с пропозициональной переменной, а может быть построена из пропозициональных переменных по правилам F_1, F_2, F_3, F_4, F_5. В этом случае формула (1) понимается безотносительно к каким-либо высказываниям, а просто как синтаксически правильное выражение, составленное из символов алфавита языка логики высказываний.

Будем для формул A и B писать $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, если формулы A и B идентичны (типографски тождественны). Если какая-то формула не является ни пропозициональной переменной, ни частью другой формулы, то мы будем опускать внешние скобки. Поэтому мы будем считать, что $\mathsf{A} = (\mathsf{A})$. Также для сокращения записи мы будем писать $\neg P$ вместо $\neg(P)$, если P — произвольная переменная.

Для удобства записи и чтения формальных выражений принято считать, что связки $\supset$ и $\sim$ связывают слабее, чем & и $\vee$, а $\neg$ — самая сильная связка, и поэтому формулу

$$\neg\left((A\&B) \supset \left(C \vee \left(\neg(D)\right)\right)\right)$$

можно переписать в форме

$$\neg(A\&B \supset C \vee \neg D).$$

До главы 5 слово «переменная» будет обозначать *пропозициональную переменную*, а слово «формула» — *пропозициональную формулу*.

Единственность декомпозиции

Может быть доказано [1, с. 103; 2], что каждая формула строится единственным образом из переменных. Точнее, для каждой формулы X только одно из следующих условий имеет место:

1. X — пропозициональная переменная.
2. Существует единственная формула Y, такая, что $\mathsf{X} = \neg\mathsf{Y}$.
3. Существуют единственная пара формул Y и Z и единственная бинарная операция $\square$ ($\square$ может обозначать любую логическую операцию), такие, что $\mathsf{X} = \mathsf{Y} \square \mathsf{Z}$.

Поэтому $\mathsf{A}_1 \square \mathsf{B}_1 = \mathsf{A}_2 \square \mathsf{B}_2$ только в том случае, если оба вхождения $\square$ обозначают одну и ту же бинарную операцию и $\mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_2$ и $\mathsf{B}_1 = \mathsf{B}_2$.

[1] Обратите внимание: для символов C, X_1, X_2, B используется шрифт Arial.

Подформулы формул

*Определение **подформулы**, как и определение формулы, рекурсивно.*

1. *Подформулой пропозициональной переменной является только она сама.*
2. *Подформулой формулы $\neg A$ является сама формула $\neg A$, формула A и любая подформула формулы A.*
3. *Подформулой формулы $A \,\square\, B$ ($\square$ — любая бинарная логическая связка) является сама формула $A \,\square\, B$, формулы A и B, любая подформула формулы A и любая подформула формулы B.*

В силу единственности декомпозиции множество всех подформул формулы определяется однозначно.

Пример 2

Множество подформул формулы $\neg\big(C \supset X_1 \& (B \vee X_2)\big)$ есть

$$\big\{\neg\big(C \supset X_1 \& (B \vee X_2)\big),\ C \supset X_1 \& (B \vee X_2),\ C,\ X_1 \& (B \vee X_2),\ X_1,\ B \vee X_2,\ B,\ X_2\big\}.$$

Легко проверить, что отношение «*формула A есть подформула формулы B*» есть отношение частичного порядка.

Введем понятие интерпретации языка логики высказываний. Интерпретировать язык логики высказываний — это значит сопоставить каждой пропозициональной переменной некоторое конкретное высказывание. Если в формуле заменить каждую пропозициональную переменную на соответствующее высказывание, то данная формула превращается в некоторое высказывание, истинностное значение которого будет зависеть лишь от истинностных значений тех высказываний, которые использованы для построения данного сложного высказывания. Но истинностное значение формулы не зависит от смысла высказываний, которые использовались.

***Интерпретацией** языка логики высказываний называется любое отображение φ: $\boldsymbol{P} \to \{\boldsymbol{И}, \boldsymbol{Л}\}$, где $\boldsymbol{P}$ — счетное множество всех пропозициональных переменных, $\{\boldsymbol{И}, \boldsymbol{Л}\}$ — множество, состоящее из двух истинностных значений.*

Любую интерпретацию φ можно продолжить до отображения $\boldsymbol{\varphi}$: $\boldsymbol{F} \to \{\boldsymbol{И}, \boldsymbol{Л}\}$, заданного на множестве всех формул рекурсивным определением.

Для определения $\boldsymbol{\varphi}(A)$ *частично упорядочим все подформулы формулы* A *относительно порядка «быть подформулой». И далее для любой подформулы* B *используем следующие правила.*

1. *Если* B *— произвольная пропозициональная переменная, то* $\boldsymbol{\varphi}(B) = \varphi(B)$.
2. *Далее, предполагая, что* $\boldsymbol{\varphi}$ *уже определено для всех подформул формулы* B *(не совпадающих с самой* B*), определяем* $\boldsymbol{\varphi}(B)$*:*
   - *Если* $B = \neg C$*, то полагаем* $\boldsymbol{\varphi}(B) = \neg\boldsymbol{\varphi}(C)$.
   - *Если* $B = C \square D$*, то полагаем* $\boldsymbol{\varphi}(B) = \boldsymbol{\varphi}(C) \square \boldsymbol{\varphi}(D)$ *(оба вхождения* $\square$ *обозначают одну и ту же бинарную логическую связку).*

В дальнейшем мы, как правило, будем обозначать расширение интерпретации на формулы $\boldsymbol{\varphi}$ *тем же символом* φ*, как и для переменных. Будем называть* $\varphi(A)$ ***истинностным значением формулы*** A ***в интерпретации*** φ.
Пусть A *— произвольная формула и* $X_1, X_2, \ldots, X_n$*,* $n > 0$*, — все переменные, входящие в* A*. Присвоим каждой переменной* X_i *(*$i = 1, 2, \ldots, n$*) некоторое истинностное значение (обычно говорят, что в этом случае имеем набор* σ *истинностных значений пропозициональных переменных, входящих в формулу* A*). Таким образом, мы определяем интерпретацию языка логики высказываний. Точнее, мы имеем бесконечное множество интерпретаций, истинностные значения которых фиксированы только на переменных* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *и совпадают там. Обозначим через* φ *одну из таких интерпретаций. Ясно, что истинностное значение* $\varphi(A)$ *является одним и тем же для всех интерпретаций с набором* σ *истинностных значений переменных* $X_1, X_2, \ldots, X_n$*.*
Поэтому $\varphi(A)$ *также называют* ***истинностным значением формулы*** A ***на наборе*** σ ***истинностных значений переменных формулы*** A.

. . . .

Пример 3

Пусть

$$A = \neg\Big(\big(X \vee (\neg Y \supset X)\big) \supset \neg Y\Big)$$

и $\{\mathbf{Л}, \mathbf{И}\}$ — набор истинностных значений переменных X и Y соответственно. Таким образом, определена интерпретация φ, для которой $\varphi(X) = \mathbf{Л}$, $\varphi(Y) = \mathbf{И}$[1]. Тогда по правилам вычисления $\varphi(A)$ получаем истинностное значение

[1] Через φ обозначается произвольная интерпретация с указанными значениями на переменных X и Y.

$$\varphi(A) = \neg\varphi\Big(\big(X \vee (\neg Y \supset X)\big) \supset \neg Y\Big) = \neg\Big(\varphi\big(X \vee (\neg Y \supset X)\big) \supset \varphi(\neg Y)\Big) =$$
$$= \neg\Big(\big(\varphi(X) \vee \varphi(\neg Y \supset X)\big) \supset \neg\varphi(Y)\Big) = \neg\Big(\big(\mathbf{Л} \vee \big(\varphi(\neg Y) \supset \varphi(X)\big)\big) \supset \neg\mathbf{И}\Big) =$$
$$= \neg\Big(\big(\mathbf{Л} \vee \big(\neg\varphi(Y) \supset \mathbf{Л}\big)\big) \supset \mathbf{Л}\Big) = \neg\Big(\big(\mathbf{Л} \vee (\neg\mathbf{И} \supset \mathbf{Л})\big) \supset \mathbf{Л}\Big) =$$
$$= \neg\Big(\big(\mathbf{Л} \vee (\mathbf{Л} \supset \mathbf{Л})\big) \supset \mathbf{Л}\Big) = \neg\big((\mathbf{Л} \vee \mathbf{И}) \supset \mathbf{Л}\big) = \neg(\mathbf{И} \supset \mathbf{Л}) = \neg\mathbf{Л} = \mathbf{И}.$$

Таким образом, формула A является истинной на наборе $\{X = \mathbf{Л},\ Y = \mathbf{И}\}$. И на этом же наборе формула $\big(X \vee (\neg Y \supset X)\big) \supset \neg Y$ ложна.

. . . .

Если нас интересуют истинностные значения формулы на всевозможных наборах истинностных значений ее переменных, то соответствующие вычисления можно представить в виде так называемой ***таблицы истинности*** этой формулы. Вот как выглядит такая таблица для формулы A из предыдущего примера.

X	Y	$\neg Y$	$\neg Y \supset X$	$X \vee (\neg Y \supset X)$	$\big(X \vee (\neg Y \supset X)\big) \supset \neg Y$	A
И	**И**	**Л**	**И**	**И**	**Л**	**И**
И	**Л**	**И**	**И**	**И**	**И**	**Л**
Л	**И**	**Л**	**И**	**И**	**Л**	**И**
Л	**Л**	**И**	**Л**	**Л**	**И**	**Л**

Данная таблица имеет четыре строки в соответствии с числом наборов истинностных значений, которые можно составить для двух переменных. Вообще, если в формулах имеется n переменных, то ее таблица истинности содержит 2^n строк. Столбцы соответствуют подформулам формулы и располагаются в таблице в соответствии с частичным порядком на подформулах слева направо, начиная с переменных. Количество столбцов может быть как угодно большое, даже для формулы с одной переменной (например, если каждая подформула есть отрицание предыдущей подформулы).

Покажем, как с помощью логики высказываний можно решать логические задачи.

Задача 1. Известны следующие факты:

1. Если A виновен и B не виновен, то C виновен.
2. C никогда не действует в одиночку.
3. A никогда не ходит на дело вместе с C.
4. Никто, кроме A, B и C, в преступлении не замешан, и, по крайней мере, один из этой тройки виновен.

Полностью доказать, кто виновен, а кто не виновен, из этих фактов не получится, но чтобы выдвинуть неопровержимое обвинение против одного из них, материала вполне достаточно.

Решение. Обозначим через пропозициональные переменные A, B и C высказывания «персона A виновна», «персона B виновна» и «персона C виновна» соответственно. Тогда факты 1–4 можно записать в виде формул:

1. $A \& \neg B \supset C$.
2. $C \supset A \vee B$.
3. $A \supset \neg C$.
4. $A \vee B \vee C$.

Для решения задачи достаточно определить, для каких значений переменных эти формулы одновременно истинны.

Первый способ решения: мы высказываем гипотезы и рассуждаем по формулам.

Пусть C — истина, тогда по формуле 2 имеем, что $A \vee B$ = **И**. Далее, если A = **И**, то по формуле 3 C = **Л**. Получили противоречие с исходным предположением. Следовательно, B = **И**.

Пусть теперь C — ложь. Тогда по формуле 1 получаем $A\&\neg B$ = **Л**. Последняя формула может быть ложной, если B = **И**. Если же B = **Л**, то тогда должно быть A = **Л**. Следовательно, в этом случае все три переменные ложны, что противоречит истинности формулы 4. Таким образом, B = **И**.

Получили, что независимо от C переменная B всегда истинна. Следовательно, B — преступник.

Второй способ — решение «в лоб»: строим таблицу истинности сразу для четырех исходных формул (столбцы для некоторых подформул опускаем).

A	B	C	$A\&\neg B$	$A \vee B$	$A\&\neg B \supset C$	$C \supset A \vee B$	$A \supset \neg C$	$A \vee B \vee C$
И	**И**	**И**	**Л**	**И**	**И**	**И**	**Л**	**И**
Л	**И**	**И**	**Л**	**И**	**И**	**И**	**И**	**И**
И	**Л**	**И**	**И**	**И**	**И**	**И**	**Л**	**И**
И	**И**	**Л**	**Л**	**И**	**И**	**И**	**И**	**И**
Л	**Л**	**И**	**Л**	**Л**	**И**	**Л**	**И**	**И**
Л	**И**	**Л**	**Л**	**Л**	**И**	**И**	**И**	**И**
И	**Л**	**Л**	**И**	**И**	**Л**	**И**	**И**	**И**
Л	**Л**	**Л**	**Л**	**Л**	**И**	**И**	**И**	**Л**

Анализируя таблицу, видим, что все четыре формулы истинны только в трех строчках и каждый раз только переменная B истинна. Следовательно, B — преступник.

Раймонд Смаллиан в нескольких своих книгах (например, в [3]) рассмотрел различные варианты оригинальных задач с рыцарями и лжецами.

Путешественник попадает на остров, где живут только рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Путешественник встречается с различными группами островитян, задает им вопросы с целью, как правило, узнать кто перед ним, рыцарь или лжец. Требуется по ответам островитян выяснить, кто они есть.

Приведем несколько типичных задач и обсудим их решения.

Задача 1. Путешественник встретил двух островитян α и β. Островитянин α сказал: «Мы оба лжецы». Кто на самом деле α и кто β?

Решение. Рыцарь не может утверждать, что он лжец. Поэтому α лжец, но они вместе с β не могут быть оба лжецами, так как в этом случае α говорил бы правду. Поэтому получаем: α лжец, а β рыцарь.

Задача 2. Теперь α говорит другую фразу о себе и β: «По крайней мере, один из нас лжец». Кто α и кто β?

Решение. Пусть α лжец. Тогда его фраза ложь и они оба рыцари, но это противоречит исходному предположению. Поэтому α рыцарь. И из его правдивого заявления следует решение: α рыцарь, а β лжец.

Мы решали неформально. Но оказывается, можно получить ответ, используя язык логики высказываний.

Пусть α один из жителей острова. Обозначим через A высказывание «α рыцарь». Тогда $\neg A$ обозначает высказывание «α лжец». Пусть α утверждает некоторое высказывание P. Нам неизвестно, рыцарь α или нет, и так же неизвестно, высказывание P — истина или ложь. Но несомненно, если α рыцарь, то P истинно, и наоборот, если P истинно, то α рыцарь. Следовательно, формула $A \sim P$ должна всегда быть истинной. И точно так же для любого другого жителя β, говорящего какое-то высказывание Q, должна быть истинна формула $B \sim Q$, где B обозначает высказывание «β рыцарь». И решением задачи является интерпретация языка логики высказываний, в которой все таким образом составленные формулы являются истинными.

Решение задачи 1. Построим таблицу истинности для формулы $A \sim \neg A \& \neg B$, полученной из условия задачи.

A	B	$\neg A \& \neg B$	$A \sim \neg A \& \neg B$
И	**И**	**Л**	**Л**
И	**Л**	**Л**	**Л**
Л	**И**	**Л**	**И**
Л	**Л**	**И**	**Л**

По таблице получаем единственное решение: α лжец, β рыцарь.

Решение задачи 2. Построим таблицу истинности для формулы $A \sim \neg(A \& B)$, полученной из условия задачи.

A	B	$\neg(A \& B)$	$A \sim \neg(A \& B)$
И	**И**	**Л**	**Л**
И	**Л**	**И**	**И**
Л	**И**	**И**	**Л**
Л	**Л**	**И**	**Л**

По таблице получаем единственное решение: α рыцарь, β лжец.

Вернемся к автореференции, о которой шла речь в конце первого параграфа.

Крайняя опасность автореференции обыграна в ***парадоксе Карри***[1].

Пусть A — произвольное высказывание. Пусть B — высказывание «Если B, то A».

Мы не знаем, верно ли высказывание B. Но если бы высказывание B было верным, то это влекло бы истинность A. Но именно это и утверждается в высказывании B, таким образом, B — верно. Но тогда доказано и A.

Таким образом, Карри показал, что обычная импликация в любой системе с автореференцией позволяет вывести любое предложение, что является противоречием.

Переформулируем парадокс Карри на языке задач о рыцарях и лжецах.

Задача 3. В этот раз β говорит о себе и α следующее: «Если я рыцарь, то α рыцарь». Кто они?

Решение. Имеем, формула $B \sim (B \supset A)$ есть истина. Построим таблицу истинности.

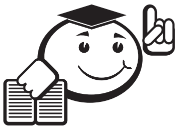
Так как $B \sim (B \supset A)$ — истина, то B = **И**, A = **И**, следовательно, β и α — рыцари.

[1]Карри, Хаскелл Брукс (1900–1982 гг.) — американский математик и логик.

A	B	$B \supset A$	$B \sim (B \supset A)$
И	**И**	**И**	**И**
И	**Л**	**И**	**Л**
Л	**И**	**Л**	**Л**
Л	**Л**	**И**	**Л**

Таким образом, парадокс Карри возникает, когда мы предполагаем, что формула $B \sim (B \supset A)$ есть истина.

В большинстве случаев в задачах с рыцарями и лжецами использование таблиц истинности достаточно трудоемко. Но применение пропозициональной логики позволит быстро найти решение, если мы программным путем будем находить интерпретации, в которых истинны заданные формулы. Можно, например, использовать систему компьютерной алгебры Mathematica [4].



Список литературы по модулю

[1] Клини С. К. Введение в метаматематику / С. К. Клини. — 2-е изд., испр. — М. : Книжный дом «Либроком», 2009. — 528 с.

[2] Черч А. Введение в математическую логику / А. Черч. — 2-е изд., испр. — М. : Книжный дом «Либроком», 2009. — Т. 1.

[3] Смаллиан Р. Как же называется эта книга? / Р. Смаллиан. — М. : Издательский дом Мещерякова, 2007. — 272 с.

[4] WolframMathematica [Электронный ресурс]. — URL : http://www.wolfram.com/mathematica/ (дата обращения: 08.05.2015).