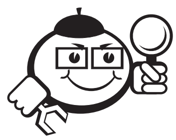
Модули 3.1–3.2. Высказывания и высказывательные формы

Простые высказывания

Понятие *простого* (*элементарного*) *высказывания* является первоначальным (неопределяемым) понятием в математической логике.

Под высказыванием обычно понимают повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, и при этом мы можем сказать, что оно должно быть истинным или ложным в данных условиях места и времени. *Логическими значениями высказываний* являются «*истина*» и «*ложь*».



Пример 1

Примеры простых высказываний

1. Николай Гоголь — автор повести «Тарас Бульба».
2. Литературные произведения о собаках «Каштанка», «Муму» и «Белолобый» написаны Антоном Чеховым.
3. Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.
4. Теорему Пифагора впервые доказал Пифагор.
5. Симфония №8 Шуберта осталась неоконченной.
6. Шуберт не смог завершить симфонию №8 потому, что его жизнь оборвалась.

Высказывания 1, 3 и 5 являются истинными. Высказывание 2 ложно. Истинности высказываний 4 и 6 неизвестны.

Следующие предложения высказываниями не являются.

7. Как пройти в библиотеку?
8. Стой, кто идет!
9. Натуральное число n является простым числом.

10 Число 10^{-6} очень мало.

11. Онегин любит Татьяну.
12. Мне кажется, что «Тараса Бульбу» написал Тарас Шевченко.

Предложения 7 и 8 не являются повествовательными. В предложении 9 не содержится никакого утверждения, и нельзя ставить вопрос об его истинности или ложности. Если подставить в это предложение вместо n какое-нибудь натуральное число, то можно тогда утверждать об его истинности или ложности. Утверждение 10 субъективно, поэтому нельзя говорить об его истинности или ложности. Утверждение 11 принципиально непроверяемое, поскольку относится к внутреннему миру человека и понимается разными людьми неодинаково. С другой стороны, предложение «Онегин сказал, что он любит Татьяну» есть истинное высказывание. Предложение 12 не имеет однозначной интерпретации и выражает отношение говорящего к высказыванию «Николай Гоголь — автор повести «Тарас Бульба».

Предложения, которые не могут иметь четкой и однозначной интерпретации, российский математик Н. Н. Непейвода называет ***квазивысказываниями*** [1, с. 18]. Квазивысказываниями являются предложения 10–12.

Понятие истинного высказывания в логике согласуется с традиционным понятием истины в естественном языке. Истина объективна. В логике ложь также объективна, но в естественном языке субъективна. Человек является лгуном, если он сознательно говорит ложь. Р. Смаллиан в книге [2] приводит пример: «В одном из учебников по аномальной психологии я прочитал о следующем происшествии. Врачи в психиатрической лечебнице собирались выписать пациента, страдающего шизофренией, и решили подвергнуть его проверке при помощи детектора лжи. Среди прочих пациенту был задан вопрос: «Вы Наполеон?» Пациент ответил отрицательно. Детектор показал, что он лжет».

Именные и высказывательные формы

Буква *n*, входящая в предложение «Натуральное число *n* является простым числом», играет роль переменной. В математике ***переменная*** — это языковое выражение, служащее для обозначения произвольного объекта из некоторого фиксированного множества, называемого областью возможных значений этой переменной — ***универсумом***. Если переменная употребляется таким образом, что допускается подстановка вместо нее обозначений (*имен*) объектов универсума, то эта переменная называется ***свободной***.

Пример 2

1. Переменные x, y и z являются свободными в выражении $x^2 + y^2 = z^2$.
2. Переменная x в выражении $x + \sin(1/x)$ является свободной.

Однако в математике встречается и такое употребление переменных, при котором не предполагается и не допускается возможность подстановки вместо них имен конкретных объектов.

Примерами таких ситуаций являются выражения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

В первом случае переменная x принимает численные значения из множества вещественных чисел, а во втором случае, переменная k — натуральное. Но, очевидно, подстановки чисел в эти выражения вместо x и k бессмысленны.

В том случае, когда по смыслу выражения, содержащего переменную, подстановка вместо неё имен конкретных объектов недопустима, эта переменная называется ***связанной***. Но мы можем без изменения смысла выражения заменить связанную переменную любой другой переменной, отсутствующей в данном выражении. Причем «новая» переменная становится также связанной. В одном выражении одна и та же переменная может употребляться и как свободная, и как связанная. Например, в выражении

$$x + \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

самое левое вхождение переменной x является свободным, а все остальные вхождения переменной — связанными. Поэтому в общем случае надо говорить о свободных и связанных ***вхождениях*** переменных.

Выражение $x+\sin(1/x)$ не является именем числа, но становится таковым, после замены свободной переменной x любым не нулевым вещественным числом. Выражение $x^2+y^2 = z^2$ не является высказыванием, поскольку не обладает истинностным значением, но становится высказыванием после замены свободных переменных x, y и z числами. Это наблюдение приводит к следующему определению.

Выражение, содержащее свободные вхождения переменных и превращающееся в имя некоторого объекта (или соответственно высказывание) всякий раз, когда вместо всех свободных вхождений каждой переменной подставляется имя какого-нибудь объекта из универсума, называется ***именной формой*** (или соответственно ***высказывательной формой***). Переменные, имеющие свободные вхождения в именную или высказывательную форму, называются ее *параметрами*. Для высказывательной формы мы часто будем употреблять обозначение вида $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, явно указывая все ее параметры. Тогда, если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — имена каких-либо объектов из универсума возможных значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно, то через $A(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ обозначается высказывание, полученное из $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ подстановкой c_1 вместо x_1, c_2 вместо $x_2, \ldots, c_n$ вместо x_n.

Пример 3

Пусть $P(n)$ обозначает высказывательную форму «n и $n+2$ — простые числа-близнецы», тогда $P(29)$ — истинное высказывание.

Сложные высказывания и логические операции

Из одних высказываний различными способами можно строить новые более сложные высказывания.

Сложные высказывания образуются из элементарных высказываний применением трех видов операций.

- ***Модальности*** применяются к высказываниям и изменяют наше *отношение* к ним. Получаются квазивысказывания. Например, модальностью является

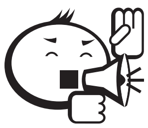
«По словам Сталина, Троцкий был врагом СССР». Такие квазивысказывания изучаются в *модальной логике*[1].

- ***Кванторные конструкции*** применяются к высказывательным формам и дают высказывание. Например, таковы высказывания «Для всех x выполнено $A(x)$» и «Существует x, для которого выполнено $A(x)$», где $A(x)$ — какая-то высказывательная форма.
- ***Логические связки*** (*операции*) применяются к высказываниям и дают новое высказывание, например из высказываний «Гремит гром» и «Сверкает молния» с помощью логической связки «если. . ., то. . .» образуется сложное высказывание «Если гремит гром, то сверкает молния».

Кванторные конструкции вида «Для всех. . .» и «Существует. . .» изучаются в *логике предикатов* (см. главу 5). Существуют и другие кванторные конструкции, например «Для большинства x выполнено $A(x)$». Они изучаются в модальной логике.

В *логике высказываний* используются только логические операции. Под логической операцией понимается способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при котором истинностное значение сложного высказывания полностью определяется истинностными значениями исходных высказываний.

Более точно мы предполагаем, что для высказываний выполняются следующие два соглашения.



Соглашения.

1. Имеются исходные неопределяемые понятия ***истина*** и ***ложь*** (обозначения: ***1*** и ***0*** или ***И*** и ***Л***), которые являются ***истинностными*** (***логическими***) ***значениями*** высказываний.
2. Логическое значение сложного высказывания зависит лишь от логических значений его компонент, а не от его смысла.

Рассмотрим логические операции.

Отрицание

Пусть, например, имеется высказывание

«Солнце вращается вокруг Земли». (1)

Мы можем образовать новое предложение, поставив перед данным предложением слова «неверно, что»:

«неверно, что Солнце вращается вокруг Земли», (2)

[1]Модальные логики изучают модальности — категории, выражающие отношение говорящего к содержанию высказывания, отношение последнего к действительности. Модальность может иметь значение утверждения, приказания, пожелания и др. Выражается специальными формами наклонений, интонацией, модальными словами (например, «возможно», «необходимо», «должен»); в логике такие слова называются модальными операторами, с их помощью указывается способ понимания суждений (высказываний).

которое, очевидно, снова будет высказыванием (истинным). Обозначим высказывание (1) буквой A, тогда высказывание (2) традиционно обозначается $\neg A$ и называется ***отрицанием высказывания*** A. Символ «$\neg$» называется ***операцией*** (***связкой***) ***отрицания***. Часто используется обозначение $\overline{A}$.

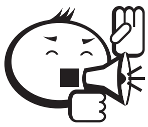
Заметим, что мы могли бы поступить по-другому для образования отрицания A, а именно, мы могли бы просто изменить сказуемое в предложении (1):

«Солнце не вращается вокруг Земли». (3)

С грамматической точки зрения (2) и (3) — это разные предложения. Но поскольку в дальнейшем мы будет интересоваться лишь истинностными значением предложений, то высказывания, подобные (2) и (3), мы будем отождествлять.

Связка отрицание словесно выражается также выражениями:

- «не A»,
- «A неверно»,
- «A ложно»,
- «A не может быть»
- и т. п.



Правило для отрицания. Утверждение $\neg A$ истинно тогда и только тогда, когда A ложно, и ложно в противном случае.

Конъюнкция

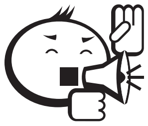
Пусть теперь имеется два высказывания: A и B. Мы можем образовать новое предложение, соединив два данных предложения союзом «и»: «A и B». Такое высказывание «A и B» естественно считать истинным только в случае, когда высказывания оба истинны. Например, мы можем построить сложное высказывание из высказываний (1) и (2), используя союз «и»:

«Солнце вращается вокруг Земли, и неверно, что Солнце вращается вокруг Земли».

Высказывание «A и B» называется ***конъюнкцией*** высказываний A и B и обозначается $A \& B$ (используется также обозначение $A \wedge B$). Заметим, что для образования конъюнкции могут быть использованы и другие союзы:

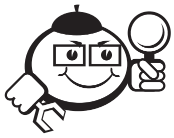
- «A, но и B также»,
- «A вместе с B»,
- «A, несмотря на B»,
- «не только A, но и B»,
- «как A, так и B»,
- «A, хотя и B»
- и т. п.

Все они записываются одинаково: $A\&B$. Разные слова здесь отражают разное отношение к факту, не меняя самого факта. Соответственно, переводя $A\&B$ на естественный язык, нужно выбирать подходящий, наиболее выразительный вариант.



Правило для конъюнкции. Утверждение $A\&B$ истинно в том и только в том случае, когда истинны как A, так и B, и ложно в остальных случаях.

В определении конъюнкции $A\&B$ высказывания A и B равноправны, но даже для этой простой связки ее математический смысл не всегда совпадает с содержательным.



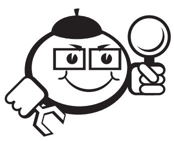
Пример 4

Пример Клини

В самом деле, математически $A\&B$ и $B\&A$ означает одно и то же, а содержательно высказывания

«Маша вышла замуж, и у нее родился ребенок» и
«У Маши родился ребенок, и она вышла замуж»

понимаются несколько по-разному. Поскольку каждое из этих предложений выражает еще некоторую причинно-следственную связь исходных высказываний.



Пример 5

Вернемся к высказыванию, которое ранее приводилось в качестве простого высказывания:

«Литературные произведения о собаках «Каштанка», «Муму» и «Белолобый» написаны Антоном Чеховым».

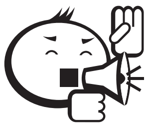
Не меняя смысла, мы можем преобразовать его и получить конъюнкцию[1] простых высказываний $A\&B\&C$, где A: «Антон Чехов написал «Каштанку», B: «Антон Чехов написал «Муму», C: «Антон Чехов написал «Белолобый».

[1] Операция конъюнкции двуместная, поэтому мы должны использовать скобки и писать, например, так $(A\&B)\&C$, но в силу ассоциативности конъюнкции (теорема 3 (пункт 3) параграфа 4.3 главы 4) скобки можно опустить.

Дизъюнкция

Сложное высказывание «A или B» символически записывается $A \vee B$. Знак $\vee$ называется ***дизъюнкцией***. Эта же связка применяется при переводе утверждений:

- «A или B или оба вместе»,
- «либо A, либо B»,
- «A и/или B»
- и т. п.



Правило для дизъюнкции. Утверждение $A \vee B$ ложно в том и только в том случае, когда ложны как A, так и B, и истинно в остальных случаях.

Дизъюнкция соответствует неразделительному «или» («A или B или оба вместе»). В естественном языке «или» используется также как разделительная связка: «то или другое, но не оба вместе». Например, высказывание с разделительным «или»

«Я полечу самолетом или я поеду на поезде»

нельзя записать, используя только дизъюнкцию (о представлении «разделительного или» см. замечание 2).

В соответствии с соглашением 2 мы можем применять конъюнкцию и дизъюнкцию к высказываниям, не связанным по смыслу. Поэтому следующие предложения являются высказываниями (первое — истинное, а второе — ложное):

«Снег белый или $2 \times 2 = 5$*»,*
«Снег белый и $2 \times 2 = 5$*».*

Импликация

Сложное высказывание «Из A следует B» символически записывается $A \supset B$ или $A \to B$. Знак $\supset$ (и $\to$) называется ***импликацией***. Другими вариантами содержательных утверждений, соответствующих импликации, служат:

- «A достаточное условие для B»,
- «B необходимое условие для A»,
- «A, только если B»,
- «B, если A»,
- «в случае A выполнено и B»,
- «A есть B»,
- «A влечет B».

В импликации $A \supset B$ высказывание A называют посылкой, а B — заключением.

Чтобы признать предложение «Из A следует B» высказыванием, необходимо определить его истинностные значения в зависимости от истинностных значений A и B. Если A истинно, а B ложно, то, конечно, предложение «Из A следует B» нужно считать ложным.

В других случаях правила вычисления истинностного значения $A \supset B$ нуждаются в комментариях. Правила вычисления опираются на содержательный смысл связки $\supset$: из A можно сделать вывод (вывести следствие) B и на наши гипотезы (соглашения 1–2).

Рассмотрим определенную на множестве целых чисел высказывательную форму $A(n)$:

«Если n делится на 6, то n делится на 3».

Общепризнано, что это утверждение является верным. Поэтому будут истинными и высказывания $A(6)$, $A(5)$ и $A(3)$.

Если 6 делится на 6, то 6 делится на 3.
Если 5 делится на 6, то 5 делится на 3.
Если 3 делится на 6, то 3 делится на 3.

Но пользуясь соглашением 2 и заменяя утверждения о делимости на 6 на их конкретные логические значения, получаем, что тогда должно быть

$$(\textbf{И} \supset \textbf{И}) = \textbf{И}$$
$$(\textbf{Л} \supset \textbf{Л}) = \textbf{И}$$
$$(\textbf{Л} \supset \textbf{И}) = \textbf{И}$$

Другими словами, должны быть истинны утверждения:

Из истины следует истина. (4)

Из лжи следует ложь. (5)

Из лжи следует истина. (6)

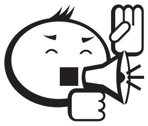
Истинность $A(6)$, $A(5)$ и $A(3)$ мы должны принять, если мы желаем обеспечить возможность подстановки в доказанные теоремы конкретных значений переменных. А по соглашению 2 нам приходится принять и (4)–(6).

Определение (Л ⊃ И) = И и соответствующее ему утверждение (6) кажутся несколько парадоксальными. Но мы знаем, что из ложных предположений можно иногда содержательным рассуждением получить истинные следствия. Например, из ложного предположения «существуют русалки» следует истинное — «купаться ночью в одиночку в незнакомом месте опасно». Принципиально неправильная система мира Птолемея, в которой центром Вселенной служит Земля, очень точно описывает видимые движения планет. Соглашение 2 опять-таки заставляет нас распространить эту истинность на все мыслимые в математике случаи.

Правда, при этом приходится признать формально истинными и предложения типа:

«Если $2 \times 2 = 5$, *то снег черный».*

Таким образом, если считать, что истинность импликации определяется истинностью ее частей (а не наличием между ними каких-либо причинно-следственных связей), то определение импликации полностью обосновано. Такое определение импликации в философии называется «*материальная импликация*».



Правило для импликации. Утверждение $A \supset B$ ложно в том и только в том случае, когда A истинно и B ложно, и истинно во всех остальных случаях.

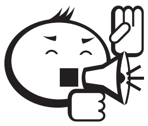
Эквиваленция

Связка «A тогда и только тогда, когда B» символически записывается $A \sim B$. Знак ~ называется ***эквиваленцией***. Той же связкой переводятся предложения:

- «A эквивалентно B»,
- «A необходимое и достаточное условие для B»,
- «если A, то B и наоборот»
- и т. п.

Пример эквиваленции:

«Для того, чтобы треугольник имел равные стороны, необходимо и достаточно, чтобы он имел равные углы».



Правило для эквиваленции. Утверждение $A \sim B$ истинно тогда и только тогда, когда истинностные значения A и B совпадают, и ложно в противном случае.

Очевидно, можно считать, что $A \sim B$ есть сокращенная запись формулы $(A \supset B)\ \&\ (B \supset A)$.

Заметим, что если логические связки применять к высказывательным формам, то в результате получаем снова высказывательные формы.

Все сказанное выше о правилах вычисления истинностных значений для сложных высказываний можно свести в качестве итога в следующую таблицу 1.

Таблица 1 – Правила вычисления истинностных значений для логических операций

A	B	$\neg A$	$A\&B$	$A \vee B$	$A \supset B$	$A \sim B$
И	**И**	**Л**	**И**	**И**	**И**	**И**
И	**Л**	**Л**	**Л**	**И**	**Л**	**Л**
Л	**И**	**И**	**Л**	**И**	**И**	**Л**
Л	**Л**	**И**	**Л**	**Л**	**И**	**И**

Похожесть символов, обозначающих пересечение двух множеств ($\cap$) и конъюнкцию двух высказываний ($\wedge$), а также символов, обозначающих объединение двух множеств ($\cup$) и дизъюнкцию двух высказываний ($\vee$), вовсе не случайна. Пусть множества X и Y имеют характеристические свойства P и Q соответственно. Тогда $X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$ и $X \cap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$. Дополнение множества, в свою очередь, соответствует отрицанию высказывания.

Логические операции для автореферентных высказываний

Если высказывание является автореферентным и «говорит» прямо или косвенно о своем истинностном значении, то для таких высказываний нередко не выполнены логические правила, по которым вычисляются истинностные значения сложного высказывания.

Пример 6

А. Операция отрицание. Истинность отрицания самоссылочного предложения не определяется только истинностью самого предложения.

- Два следующих предложения верны, несмотря на то, что одно из них является отрицанием другого:

  «Восьмым словом в этом предложении является частица «не»,

  «Восьмым словом в этом предложении не является частица «не».

- Несмотря на то, что два предложения противоположны друг другу, они оба неверны:

  «Число слов в записанном здесь предложении равно девяти»,

  «Число слов в записанном здесь предложении не равно девяти».

Б. Операция конъюнкция.

A: «У людей на руке пять пальцев» — истина;

B: «В этом предложении пять слов» — истина;

A&B: «У людей на руке пять пальцев, и в этом предложении пять слов» — ложь.

В этом случае содержательное истинностное значение (= ложь) последнего предложения отличается от истинностного значения (= истина), которое должно быть вычислено для конъюнкции двух истинных высказываний.

Список литературы по модулям

[1] Непейвода Н. Н. Прикладная логика : учеб. пособие / Н. Н. Непейвода. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.

[2] Смаллиан Р. Как же называется эта книга? / Р. Смаллиан. — М. : Издательский дом Мещерякова, 2007. — 272 с.