ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Модуль 2.6. Функции (отображения)

Зюзьков Валентин Михайлович

Отношение f на $X \times Y$ называется **функцией** (или **отображением**) из X в Y и обозначается через: $\boldsymbol{f: X \to Y}$, если для каждого $x \in X$ существует единственный элемент $y \in Y$ такой, что $<x, y> \in f$.

Если f – функция, то вместо $<x, y> \in f$ пишут $\boldsymbol{y = f(x)}$ и говорят, что y – **значение, соответствующее аргументу** x.

Если используют термин «отображение» вместо термина «функция», то y называется **образом элемента** x.

Множество X называется областью определения функции f, а множество Y называется областью потенциальных значений.

Если $A \subseteq X$, то множество $f(A) = \{\, f(x) \mid x \in A \,\}$ называется **образом множества A.**

Образ всего множества X называется **областью значений** функции f.

Если $B \subseteq Y$, то множество $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$ называется **прообразом множества** B.

Пример

Пусть $\boldsymbol{X} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, а $\boldsymbol{Y} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Определим отношение $\boldsymbol{f} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$:

$f = \{<-2, 5>, <-1, 2>, <0, 1>, <1, 2>, <2, 5>\}$.

Отношение f – функция из X в Y.

Легко заметить, что выполнено отношение

$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$.

Пример

Пусть $\boldsymbol{X} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

$\boldsymbol{Y} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и

$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$.

Если $A = \{1, 2\}$,

то $f(A) = \{y \mid \langle x, y\rangle \in f$ для некоторого x из $A\} = \{y \mid y = f(x)$ для некоторого x из $A\} = \{2, 5\}$ **является образом $\boldsymbol{A}$** при отображении f.

Пример

Пусть $\boldsymbol{X} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\boldsymbol{Y} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$.

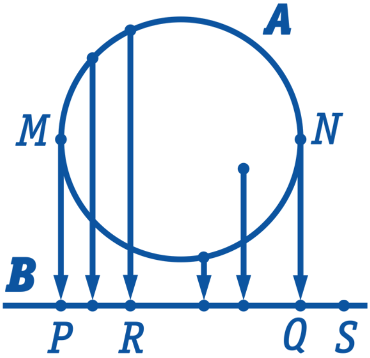
Если $B = \{0, 2, 3, 4, 5\} \subseteq Y$,

то $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} = \{-1, 1, -2, 2\}$ **является прообразом** B.

$f^{-1}(\{0, 3\}) = \varnothing$.

Пример

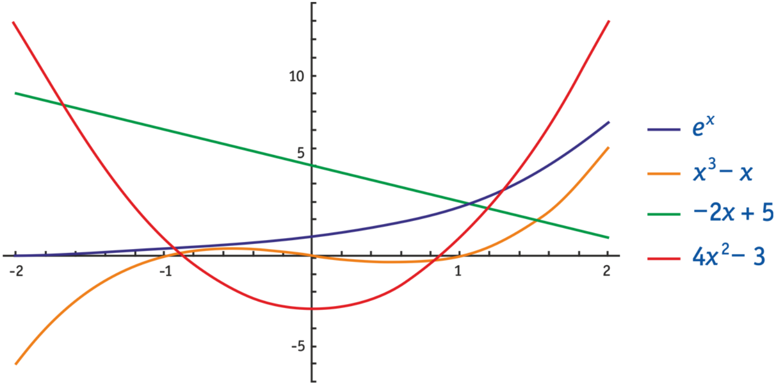
Ортогональная проекция окружности A на прямую B

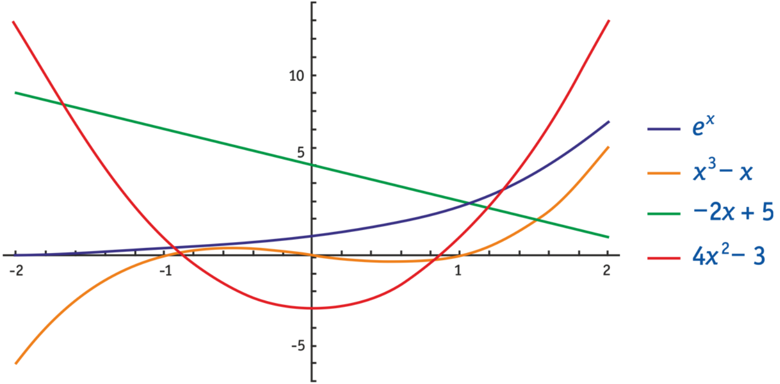


Классификация функций

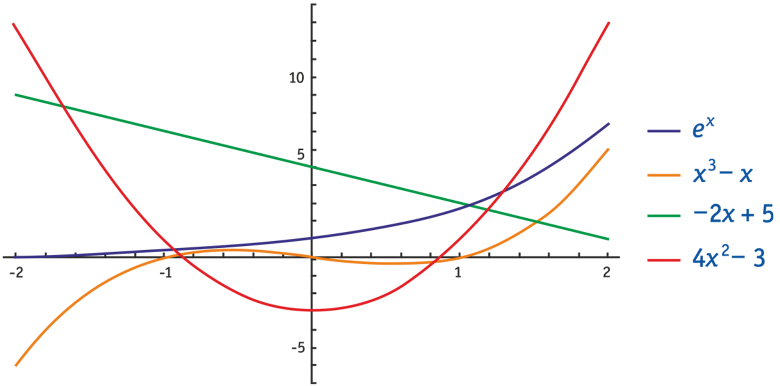
Дана функция (отображение) $\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$.

- f – **инъективная** функция, если для всех x_1, x_2 выполняется: $x_1 \neq x_2$ влечет $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- f – **сюръективная** функция, если для любого элемента $y \in Y$ существует элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$.
- f – **биективная** функция, если f одновременно инъективна и сюръективна. Если существует биекция f: $X \to Y$, то говорят, что f осуществляет **взаимно-однозначное соответствие** между множествами X и Y.

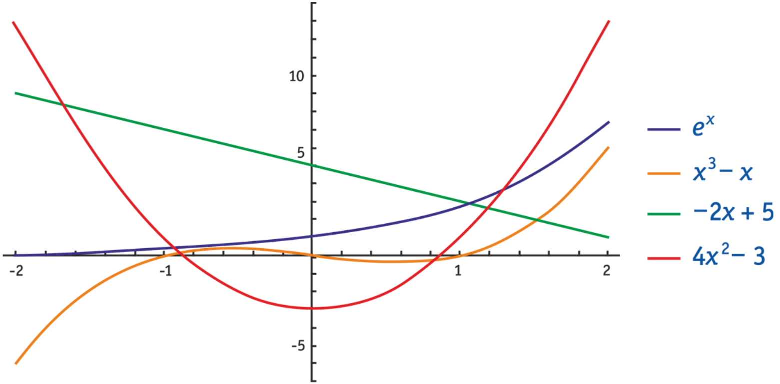

10
5
-5
-2
-1
1
2
e^x
$x^3 - x$
$-2x + 5$
$4x^2 - 3$



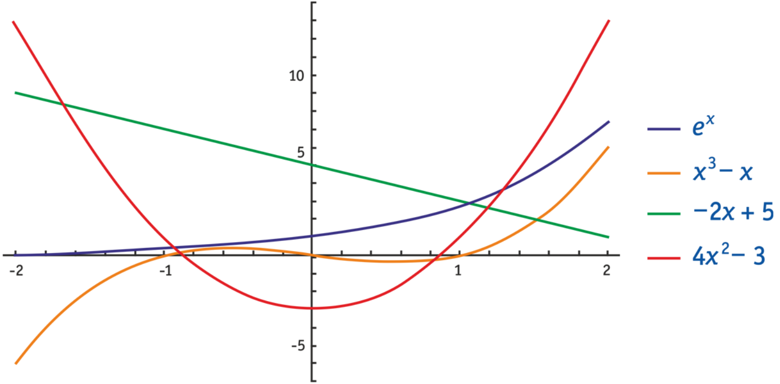
Функция $f_1(x) = e^x$ инъективна,
но не сюръективна.



Функция $f_2(x) = x^3 - x$ сюръективна, но не инъективна.



Функция $f_3(x) = -2x + 5$ биективна.



Функция $f_4(x) = 4x^2 - 3$ не является ни инъективной, ни сюръективной.

- Функция $f_1(x) = e^x$ инъективна, но не сюръективна.
- Функция $f_2(x) = x^3 - x$ сюръективна, но не инъективна.
- Функция $f_3(x) = -2x + 5$ биективна.
- Функция $f_4(x) = 4x^2 - 3$ не является ни инъективной, ни сюръективной.

Композиция функций

Даны множества $\boldsymbol{X, Y, Z}$ и отображения $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Z}$.

Композиция отношений f и g:

$\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f} = \{<x, z> \mid$ существует такое y, что $y = f(x)$ и $z = g(y)\}$.

Композиция функций есть функция $\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Z}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Примеры композиций

- $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
- $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- $(f \circ (f \circ g))(x) = f(f(g(x)))$

Когда обратное отношение для функции является также функцией?

Теорема.

Отображение $f\colon X \to Y$ имеет обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{f}$ – **биекция**.

Примеры

- Функция $f(x) = 2x + 1$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имеет обратную функцию $f^{-1}(y) = (y - 1)/2$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

- Функция $f(x) = x^2$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ не имеет обратной функции $f^{-1}(y)$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

- Функция $f(x) = x^2$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ имеет обратную функцию $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$.

ТУСУР TUSUR UNIVERSITY

Благодарю за внимание!