ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Модуль 2.5. Эквивалентность и порядок

Зюзьков Валентин Михайлович

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение ρ на множестве X называется **отношением эквивалентности** на множестве X.

Пример

Пусть $A = \mathbf{R}^2 \setminus \{<0, 0>\}$ — множество точек на плоскости за исключением начала координат.

Отношение ρ на A: $<a, b> \rho <c, d> \Leftrightarrow$ точки $<a, b>$ и $<c, d>$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

ρ — отношение эквивалентности.

Пример

Отношение **сравнимости по модулю** натурального числа n на множестве целых чисел **Z**:

$x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow x - y$ делится на n.

$n \mid x - x \Rightarrow$ отношение рефлексивно на **Z**.

$n \mid x - y \Rightarrow n \mid y - x \Rightarrow$ отношение симметрично.

$x - y = t_1 n$ и $y - z = t_2 n \Rightarrow x - z = (t_1 + t_2)n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ отношение транзитивно.

Пример

Отношение ρ, определенное на множестве **N**: $n \, \rho \, m \Leftrightarrow n$ – делитель m.

2 – делитель 4, но 4 не является делителем 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho$ не является симметричным отношением $\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho$ не является отношением эквивалентности.

Класс эквивалентности

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве X.

Класс эквивалентности, порожденный элементом x:
$[x] = \{y \mid y \in X \text{ и } x \,\rho\, y\}$.

Свойства:

$x \in [x]$;

$x \,\rho\, y \Rightarrow [x] = [y]$.

Пример

Отношение $x^2 = y^2$ на множестве вещественных чисел порождает следующие классы эквивалентности: $[\boldsymbol{x}] = \{\, \boldsymbol{x}, -\boldsymbol{x} \,\}$.

Пример

Отношение **сравнимости** $x \equiv y \pmod{n}$ порождает следующие классы эквивалентности: вместе с любым числом $a \in Z$ в этом же классе эквивалентности содержатся все числа вида $a + kn$, где k – целое.

Каждый класс эквивалентности состоит из чисел, дающих при делении на n один и тот же остаток.

Классы эквивалентности:
$[0], [1], [2], \ldots, [n-1]$ (**классы вычетов по модулю n**).

Пример

Отношение {<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>, <1, 2>, <1, 4>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 5>, <5, 3>, <4, 1>, <4, 2>} есть отношение эквивалентности на множестве {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Легко видеть, что [1] = {1, 2, 4} = [2] = [4], [3] = = {3, 5} = [5] и [6] = {6}.

Всего имеется три различных класса эквивалентности: {1, 2, 4}, {3, 5} и {6}.

Отношение порядка

- Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение на множестве X называется отношением **частичного порядка на множестве X.**

- Отношение частичного порядка ρ на множестве X, для которого любые два элемента сравнимы, т. е. для любых $x, y \in X$ имеем $x \rho y$ или $y \rho x$, называется отношением **линейного порядка.**

- Множество X с заданным на нем частичным (линейным) порядком называется **частично (линейно) упорядоченным.**

Пример

Отношение $\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{y}$ на множестве действительных чисел есть отношение **частичного порядка**, более того, это **линейный порядок.**

Пример

Во множестве подмножеств некоторого универсума $\boldsymbol{U}$ отношение $A \subseteq B$ есть отношение частичного порядка, но оно не является отношением линейного порядка в общем случае.

Пример

Отношение делимости на множестве ненулевых целых чисел «n — делитель m» не обладает антисимметричностью: числа 2 и −2 делят друг друга.

Поэтому данное отношение **не является частичным порядком**.

Но это же отношение **на натуральных** числах **является частичным порядком**.

Благодарю за внимание!