ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Модуль 2.3. Отношения

Зюзьков Валентин Михайлович

Упорядоченная пара $<x, y>$ – это совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке.

Две пары $<x, y>$ и $<u, v>$ считаются **равными** тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}$.

Аналогично определяется $<x_1, x_2,\ldots, x_n>$ – **кортеж** из n элементов $x_1, x_2,\ldots, x_n$, $n > 1$.

Множество $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid x_i \in X_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ называется **прямым** (или **декартовым**) произведением множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Если $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, то пишут $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = X^n$ и множество X^n называется ***n*-ой декартовой степенью** множества X.

Пример

Пусть $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2\}$, тогда

$X \times Y = \{<a, 1>, <b, 1>, <c, 1>, <a, 2>, <b, 2>, <c, 2>\}$,

$Y \times X = \{<1, a>, <1, b>, <1, c>, <2, a>, <2, b>, <2, c>\}$.

Если $X \neq Y$, то $X \times Y \neq Y \times X$.

Пример

Пусть $\mathbf{R}$ – множество всех действительных чисел, тогда $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ – декартова плоскость.

Произвольное подмножество упорядоченных пар $\rho \subseteq X \times Y$ называется **отношением** ρ множеств X и Y.

Вместо $<x, y> \in \rho$ пишут также $\boldsymbol{x} \, \rho \, \boldsymbol{y}$; при этом говорят, что x и y находятся в отношении ρ.

Подмножество $\rho \subseteq X^2$ называется **отношением на $\boldsymbol{X}$**.

Отношения, содержащие кортежи длиной n, называются **n-местными**.

2-местные отношения называются также **бинарными**.

Область определения отношения $\rho \subseteq X \times Y$ есть множество $D_\rho = \{x \mid x$ – первая координата какой-то пары из $\rho\}$.

Областью значений отношения ρ называется множество $R_\rho = \{y \mid y$ – вторая координата какой-то пары из $\rho\}$.

Пример отношения

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{r, s\}$.

$A \times B = \{<1, r>, <2, r>, <3, r>,$

$<1, s>, <2, s>, <3, s>\}$,

$\rho = \{<1, r>, <1, s>, <3, s>\}$,

$D_\rho = \{1, 3\}$, $R_\rho = \{r, s\}$.

Примеры отношений

- Отношение **равенства** на **Z**:

  $\rho_1 = \{<x, y> \mid x, y \in Z$ и $x = y\}$.

  Вместо $<x, y> \in \rho_1$ пишут $\boldsymbol{x = y}$.

- Отношение «**меньше**» на **Z**:

  $\rho_2 = \{<x, y> \mid x, y \in Z$ и $x < y\}$.

  Вместо $<x, y> \in \rho_2$ пишут $\boldsymbol{x < y}$.

Пример отношения

$\rho = \{\langle x, y\rangle \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$,

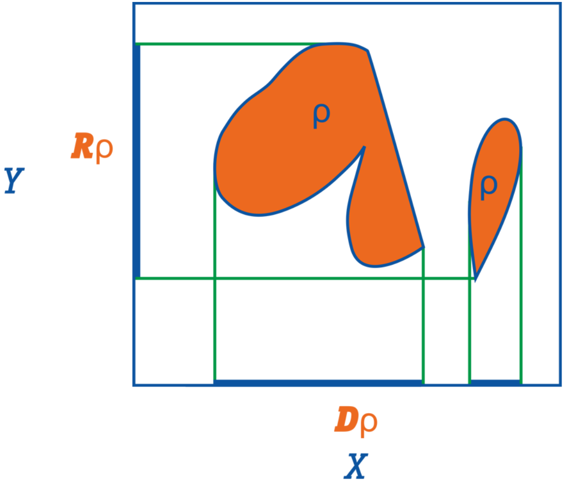
$D_\rho = R_\rho = \{t \mid -2 \le t \le 2\}$.

Пример отношения

A – множество женщин,
B – множество мужчин,
$\{<x, y> \mid y$ является мужем $x\}$
есть отношение множеств A и B.

Область определения есть множество всех замужних женщин, а **множество значений** – множество всех женатых мужчин.

Пример отношения



Определение обратного отношения

Пусть $\rho \subseteq X \times Y$ есть отношение на $X \times Y$.

Тогда $\rho^{-1} = \{<y, x> \mid x \in X, y \in Y$ и $<x, y> \in \rho\}$.

Отношение ρ^{-1} называется **обратным отношением** к данному отношению ρ.

Свойство: $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

Примеры обратных отношений

- Пусть $\rho = \{<1, r>, <1, s>, <3, s>\}$, тогда $\rho^{-1} = \{<r, 1>, <s, 1>, <s, 3>\}$.
- Пусть $\rho = \{<x, y> \mid y$ является мужем $x\}$, тогда ρ^{-1} – отношение $\{<x, y> \mid y$ – жена $x\}$.
- Для отношения равенства обратным является оно само.
- Отношения < и > взаимно обратны.

Композицией отношений $\rho \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ и $\varphi \subseteq \boldsymbol{Y} \times \boldsymbol{Z}$ называется отношение $\varphi \circ \rho \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Z}$ такое, что

$\varphi \circ \rho = \{\langle x, z\rangle \mid x \in X,\ z \in Z$ и существует $y \in Y$, для которого $\langle x, y\rangle \in \rho$ и $\langle y, z\rangle \in \varphi\}$.

Пример композиции

Пусть ρ и φ – отношения на множестве людей:

$x \rho y$, если и только если x – мать y;

$x \varphi y$, если и только если x – отец y.

Имеем $\langle x, y\rangle \in \varphi \circ \rho$ тогда и только тогда,

когда x – бабушка по линии отца для y.

И $\langle x, y\rangle \in \rho \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

x – дедушка по линии матери для y.

Пример композиции

Пусть $\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{B} = \{x, y\}$, а $\boldsymbol{C} = \{s, t, r, q\}$

и пусть отношения ρ на $A \times B$ и φ на $B \times C$

заданы в виде:

$\rho = \{<1, x>, <1, y>, <3, x>\}$;

$\varphi = \{<x, s>, <x, t>, <y, r>, <y, q>\}$.

Тогда

$\varphi \circ \rho = \{<1, s>, <1, t>, <1, r>, <1, q>, <3, s>, <3, t>\}$.

ТУСУР TUSUR UNIVERSITY

Благодарю за внимание!