Модуль 2.5. Эквивалентность и порядок

Рассмотрим два важных класса отношений: отношения эквивалентности и отношения порядка.

Отношение эквивалентности

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение ρ *на множестве* X *называется* ***отношением эквивалентности*** *на множестве* X.

Пример 1

1. Отношение равенства на множестве целых чисел есть отношение эквивалентности.

2. Отношение равносильности на множестве формул логики высказываний является отношением эквивалентности.

3. Пусть $A = \mathbf{R}^2 \backslash \{<0, 0>\}$ — множество точек на плоскости за исключением начала координат. Отношение ρ на A определим так: $<a, b>\ \rho\ <c, d>$ тогда и только тогда, когда точки $<a, b>$ и $<c, d>$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Легко показать, что отношение ρ является отношением эквивалентности.

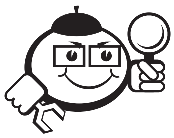
4. Отношение сравнимости по модулю натурального числа n на множестве целых чисел $\mathbf{Z}$: $x \equiv y \pmod n$ тогда и только тогда, когда $x - y$ делится на n. Это отношение рефлексивно на $\mathbf{Z}$, так как для любого $x \in \mathbf{Z}$ имеем $x - x$ равно нулю, и, следовательно, делится на n. Это отношение симметрично, так как если $x \equiv y \pmod n$, то $y \equiv x \pmod n$. Это отношение транзитивно, так как если $x \equiv y \pmod n$, то для некоторого целого t_1 имеем $x - y = t_1 n$, а если $y \equiv z \pmod n$, то для некоторого целого t_2 имеем $y - z = t_2 n$. Отсюда $x - z = (t_1 + t_2)n$, т. е. $x \equiv z \pmod n$.

5. Рассмотрим отношение ρ, определенное на множестве $\mathbf{N}$ так: $n\rho m$, если и только если n — делитель m. Отношение ρ не является отношением эквивалентности. Чтобы показать это, достаточно убедиться, что хотя бы одно из трех свойств не выполняется для ρ. Очевидно, что ρ не является симметричным отношением, так как, например, 2 — делитель 4, но 4 не является делителем 2.

6. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и отношение ρ_1 на A определено как $\rho_1 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>, <1, 2>, <1, 4>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 5>, <5, 3>, <4, 1>, <4, 2>\}$. Тогда отношение рефлексивно, транзитивно и симметрично, поэтому ρ_1 есть отношение эквивалентности на множестве A.

Пусть ρ *—* *отношение эквивалентности на множестве* X. ***Классом эквивалентности***, *порожденным элементом* x, *называется подмножество множества* X, *состоящее из тех элементов* $y \in X$, *для которых $x\rho y$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x, обозначается $[x]$:*

$$[x] = \{y \mid y \in X \text{ и } x\rho y\}.$$



Пример 2

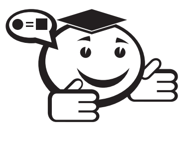
1. Отношение равенства на множестве целых чисел порождает следующие классы эквивалентности: для любого элемента $x \in \mathbf{Z}$ имеем $[x] = \{x\}$, т. е. каждый класс эквивалентности содержит только один элемент — число x.

2. Отношение сравнимости по модулю числа n на множестве целых чисел $\mathbf{Z}$ порождает следующие классы эквивалентности: вместе с любым числом $a \in \mathbf{Z}$ в этом же классе эквивалентности содержатся все числа вида $a+kn$, где k — целое. Очевидно, что все числа $0, 1, 2, \ldots, n-1$ порождают различные классы эквивалентности, которые обозначим $[0], [1], [2], \ldots, [n-1]$. Они называются ***классами вычетов по модулю n***. Все остальные классы эквивалентности для этого отношения совпадают с ними, так как любое число $a \in \mathbf{Z}$ можно представить в виде $a = qn+r$, где $0 \leqslant r < n$.

3. Отношение $\rho_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle, \langle 6, 6\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 5, 3\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$ есть отношение эквивалентности на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Легко видеть, что $[1] = \{1, 2, 4\} = [2] = [4]$, $[3] = \{3, 5\} = [5]$ и $[6] = \{6\}$. Всего имеется три различных класса эквивалентности: $\{1, 2, 4\}$, $\{3, 5\}$ и $\{6\}$.

Теорема 6. Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве X. Тогда: 1) если $x \in X$, то $x \in [x]$; 2) если $x, y \in X$ и $x\rho y$, то $[x] = [y]$ (т. е. класс эквивалентности порождается любым своим элементом).

Доказательство. Для доказательства первой части утверждения достаточно воспользоваться рефлексивностью отношения ρ: $x\rho x$ и, следовательно, $x \in [x]$. Докажем вторую часть утверждения. Пусть $z \in [y]$. Тогда $y\rho z$, и в силу транзитивности отношения ρ имеем $x\rho z$, т. е. $z \in [x]$. Отсюда $[y] \subseteq [x]$. Аналогично, в силу симметричности ρ можно показать, что $[x] \subseteq [y]$, а значит, $[y] = [x]$.



Разбиением *множества X называется множество попарно непересекающихся подмножеств X, таких, что каждый элемент множества X принадлежит одному и только одному из этих подмножеств.*

Пример 3

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда $\{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$ — разбиение множества X. Пусть X — множество студентов университета. Тогда разбиением этого множества является, например, совокупность студенческих групп.

Теорема 7. Всякое разбиение множества X определяет на X отношение эквивалентности ρ: $x\rho y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному подмножеству разбиения.

Доказательство. Рефлексивность и симметричность ρ очевидны. Пусть теперь $x\rho y$ и $y\rho z$. Тогда $x, y \in X_1$ и $y, z \in X_2$, где X_1, X_2 — подмножества из разбиения X. Поскольку $y \in X_1$, $y \in X_2$, то $X_1 = X_2$. Следовательно, $x, z \in X_1$ и $x\rho z$.

Теорема 8. Всякое отношение эквивалентности ρ определяет разбиение множества X на классы эквивалентности относительно этого отношения.

Доказательство. Докажем, что совокупность классов эквивалентности определяет разбиение множества X. В силу теоремы 6 $x \in [x]$, и, следовательно, каждый элемент множества X принадлежит некоторому классу эквивалентности. Из теоремы 6 вытекает также, что два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают, так как если $z \in [x]$ и $z \in [y]$, то $x\rho z$, откуда $[x] = [z]$, и $y\rho z$, откуда $[y] = [z]$. Следовательно, $[x] = [y]$.

*Совокупность классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности ρ называется **фактор-множеством** множества X по отношению ρ и обозначается X/ρ.*

Пример 4

1. Для отношения эквивалентности $\rho_1 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>, <1, 2>, <1, 4>, <2, 1>, <2, 4>, <3, 5>, <5, 3>, <4, 1>, <4, 2>\}$ на множестве $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ фактор-множество A/ρ_1 равно $\{\{1, 2, 4\}, \{5, 3\}, \{6\}\}$.

2. На множестве $\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$ определим отношение ρ: $<x, y> \rho <u, v> \Leftrightarrow xv = yu$. Это отношение рефлексивно: $<x, y> \rho <x, y>$, так как $xy = yx$; симметрично: если $<x, y> \rho <u, v>$, то $<u, v> \rho <x, y>$, так как из $xv = yu$ следует, что и $uy = vx$;

транзитивно: если выполнено $<x, y> \rho <u, v>$ и $<u, v> \rho <w, z>$, то $<x, y> \rho <w, z>$, так как, перемножая левые и правые части равенств $xv = yu$ и $uz = vw$, после сокращения получаем $xz = yw$.

Класс эквивалентности, порожденной парой $<x, y>$, для этого отношения ρ определяется соотношением $[<x, y>] = \{<u, v> \mid x/y = u/v\}$. Каждый класс эквивалентности в этом случае определяет одно положительное рациональное число. Таким образом, фактор-множество $\mathbf{N} \times \left(\mathbf{N} \backslash \{0\}\right)/\rho$ есть множество положительных рациональных чисел. Именно так строго определяются рациональные числа с помощью теории множеств.

Элементы многих множеств можно разместить в определенном порядке на основе некоторого, заранее оговоренного соглашения. Например, на любом подмножестве A множества целых положительных чисел можно договориться о таком расположении элементов, при котором меньшие элементы будут находиться левее больших. При этом можно сказать, что на множестве A определено отношение порядка $x\rho y$, где ρ есть отношение «меньше или равно».

Частичный порядок

Рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение на множестве X называется отношением ***частичного порядка на множестве X****.*

Линейный порядок

Отношение частичного порядка ρ на множестве X, для которого любые два элемента сравнимы, т. е. для любых $x, y \in X$ имеем $x\rho y$ или $y\rho x$, называется отношением ***линейного порядка****.*

Множество X с заданным на нем частичным (линейным) порядком называется ***частично (линейно) упорядоченным****.*

Пример 5

1. Отношение $x \leqslant y$ на множестве действительных чисел есть отношение частичного порядка, причем это линейный порядок.

2. Отношение $x < y$ на множестве действительных чисел не является отношением частичного порядка, поскольку не рефлексивно.

3. Во множестве подмножеств некоторого универсума $\boldsymbol{U}$ отношение $A \subseteq B$ есть отношение частичного порядка, но оно не является отношением линейного порядка в общем случае.

4. Схема организации подчинения в учреждении есть отношение частичного порядка на множестве должностей.

5. Отношение на множестве слов, определенное так: «слово w связано отношением ρ со словом v, если $w = v$ или w появляется в словаре перед словом v», является отношением линейного порядка (***лексикографический порядок***).

6. На множестве положительных целых чисел можно ввести различные линейные порядки, причем некоторые выглядят весьма экзотично. Будем использовать привычное обозначение $\leqslant$ для следующего порядка.

$3 \leqslant 5 \leqslant 7 \leqslant 9 \leqslant \ldots$

$\leqslant 2 \times 3 \leqslant 2 \times 5 \leqslant 2 \times 7 \leqslant 2 \times 9 \leqslant \ldots$

$\leqslant 2^2 \times 3 \leqslant 2^2 \times 5 \leqslant 2^2 \times 7 \leqslant 2^2 \times 9 \leqslant \ldots$

$\leqslant 2^3 \times 3 \leqslant 2^3 \times 5 \leqslant 2^3 \times 7 \leqslant 2^3 \times 9 \leqslant \ldots$

$\ldots$

$\ldots$

$\ldots$

$\ldots \leqslant 2^n \leqslant \ldots \leqslant 2^3 \leqslant 2^2 \leqslant 2 \leqslant 1.$

Сначала идут все нечетные числа, потом все нечетные, умноженные на 2, потом — на 4 и т. д. После бесконечного множества таких бесконечных «секций» стоит секция степеней двойки, выстроенных в обратном порядке. Такая упорядоченность натуральных чисел называется ***порядком Шарковского***, с которым связан один из ярких результатов в теории нелинейной динамики [1].

Список литературы по модулю

[1] Зюзьков В. М. Синергетика для программистов : учеб. пособие / В. М. Зюзьков. — Томск : ТУСУР, 2001. — 194 с.