Модули 2.3–2.4. Отношения и их специальные свойства

Упорядоченная пара *$<x, y>$ интуитивно определяется как совокупность, состоящая из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке. Две пары $<x, y>$ и $<u, v>$ считаются равными тогда и только тогда, когда $x = u$ и $y = v$.*

Предыдущее определение апеллирует к таким неопределенным понятиям, как «совокупность» и «расположенные в определенном порядке». Для наших целей этого вполне достаточно. Но понятие «упорядоченная пара» можно определить точно, используя понятия «множество», «элемент» и «отношение принадлежности»[1].

Аналогично, мы определяем $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ — кортеж из n элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n > 1$ (называют еще «упорядоченная n-ка»). Используется также соглашение: $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ совпадает по смыслу с парами

$$<<x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}>, x_n> \text{ и } <x_1, <x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n>>.$$

Прямое произведение

Прямым *(или* ***декартовым) произведением*** *множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется множество всех кортежей $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ таких, что $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Обозначается прямое произведение множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ через $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Если $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, то пишут $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = X^n$ и множество X^n называется ***n-ой декартовой степенью*** *множества X.*

Пример 1

1. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{0, 1\}$. Тогда $X \times Y = \{<1, 0>, <1, 1>, <2, 0>, <2, 1>, <3, 0>, <3, 1>\}$ и $Y \times X = \{<0, 1>, <0, 2>, <0, 3>, <1, 1>, <1, 2>, <1, 3>\}$. Мы указали, кроме того, такие множества X и Y, что $X \times Y \neq Y \times X$.

2. Пусть X — множество точек отрезка $[0, 1]$, а Y — множество точек отрезка $[1, 2]$. Тогда $X \times Y$ — множество точек квадрата $[0, 1] \times [1, 2]$ с вершинами в точках $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ и $(1, 2)$.

[1] Одно из возможных определений: упорядоченная пара $<x, y>$ есть множество $\{x, \{x, y\}\}$. Таким образом, достигается асимметрия между x и y.

Отношением *ρ множеств X и Y называется произвольное подмножество $X \times Y$. Если $<x, y> \in \rho$, это записывается как $x\rho y$; при этом говорят, что x и y находятся в отношении ρ, или просто, что x* ***относится*** *к y. Элементы x и y называются* ***координатами****, или* ***компонентами****, отношения ρ. Подмножество $\rho \subseteq X^2$ называется* ***отношением на X****.*

В общем случае произвольное множество упорядоченных n-ок называют ***n-местным отношением****, тогда для случая n = 2 отношения называются* ***двуместными*** *или* ***бинарными****.*

Если $\rho \subseteq X \times Y$, то ***областью определения*** *отношения ρ называется множество D_ρ всех первых координат упорядоченных пар из ρ, а* ***областью значений*** *отношения ρ называется множество R_ρ всех вторых координат упорядоченных пар из ρ.*

Множество D_ρ называется также ***проекцией*** *отношения ρ на X, а R_ρ — проекцией отношения ρ на Y.*

Пример 2

1. Если $A = \{1, 2, 3\}$, а $B = \{r, s\}$, так что

$$A \times B = \{<1, r>, <2, r>, <3, r>, <1, s>, <2, s>, <3, s>\},$$

тогда $\rho = \{<1, r>, <1, s>, <3, s>\}$ есть отношение множеств A и B. Можно также записать $3\rho s$, поскольку $<3, s> \in \rho$. Область определения отношения ρ есть множество $\{1, 3\}$, а область значения — множество B. Множество $A \times B$ содержит шесть элементов, поэтому существует $2^6 = 64$ подмножеств множества $A \times B$. Следовательно, существует 64 различных отношений на $A \times B$.

2. Само множество $A \times B$ есть отношение множеств A и B.

3. Отношение равенства на множестве $\mathbf{R}$ есть множество $\{<x, x> \mid x \in \mathbf{R}\}$. Для этого отношения существует специальное обозначение =. Область определения $D_=$ совпадает с областью значений $R_=$ и является множеством $\mathbf{R}$.

4. Отношение «меньше чем» на множестве $\mathbf{Z}$ есть множество $\{<x, y> \mid$ для целых чисел x и y найдется положительное число z такое, что $x + z = y\}$. Для этого отношения существует специальное обозначение <. Область определения $D_<$ совпадает с областью значений $R_<$ и является множеством $\mathbf{Z}$.

5. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пусть отношение ρ задано на A: $x\rho y \Leftrightarrow x$ делитель y. (Символ $\Leftrightarrow$ заменяет слова «тогда и только тогда, когда».)

Тогда $\rho = \{<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <1, 5>, <1, 6>, <2, 2>, <2, 4>, <2, 6>, <3, 3>, <3, 6>, <4, 4>, <5, 5>, <6, 6>\}$. Имеем $D_\rho = R_\rho = A$.

6. Отношение $\{<x, y> \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ есть бинарное отношение на $\mathbf{R}$. Область определения и область значений равны и совпадают с множеством $\{t \mid -2 \leqslant t \leqslant 2\}$.

7. Пусть A — множество товаров в магазине. Тогда $\{<x, y> \mid x \in A, y \in \mathbf{R}$ и y — цена $x\}$ — отношение множеств A и $\mathbf{R}$. Область определения отношения есть A,

а множество значений есть подмножество множества **R**, каждый элемент которого является ценой некоторого товара в магазине.

8. Пусть A — множество женщин, а B — множество мужчин, тогда $\{<x, y> \mid y$ является мужем $x\}$ есть отношение множеств A и B. Область определения есть множество всех замужних женщин, а множество значений — множество всех женатых мужчин.

Рассмотрим операции над отношениями. Конечно же, поскольку отношения являются множествами, над ними можно производить обычные булевы операции. Но есть и специальные для бинарных отношений операции.

С каждым отношением ρ на $X \times Y$ связано отношение ρ^{-1} на $Y \times X$.

Обратное отношение

Пусть $\rho \subseteq X \times Y$ есть отношение на $X \times Y$. Тогда отношение ρ^{-1} на $Y \times X$ определяется следующим образом:

$$\rho^{-1} = \left\{<y, x> \mid x \in X,\ y \in Y \text{ и } <x, y> \in \rho\right\}.$$

*Другими словами, $<y, x> \in \rho^{-1}$ тогда и только тогда, когда $<x, y> \in \rho$ или, что равносильно, $y\rho^{-1}x$ тогда и только тогда, когда $x\rho y$. Отношение ρ^{-1} называется **обратным отношением** к данному отношению ρ.*

Пример 3

1. Пусть $\rho = \{<1, r>, <1, s>, <3, s>\}$, тогда $\rho^{-1} = \{<r, 1>, <s, 1>, <s, 3>\}$.

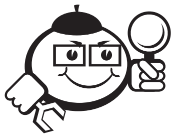
2. Пусть $\rho = \{<x, y> \mid y$ является мужем $x\}$, тогда ρ^{-1} есть отношение $\{<x, y> \mid y$ — жена $x\}$.

3. Для отношения равенства обратным является оно само, отношения $<$ и $>$ взаимно обратны.

Имея два заданных отношения, можно образовать новые отношения указанным ниже способом.

Композиция отношений

Композицией отношений *$\rho \subseteq X \times Y$ и $\varphi \subseteq Y \times Z$ называется отношение $\varphi \circ \rho \subseteq X \times Z$, такое, что $\varphi \circ \rho = \{<x, z> \mid x \in X,\ z \in Z$ и существует $y \in Y$, для которого $<x, y> \in \rho$ и $<y, z> \in \varphi\}$.*



Пример 4

1. Пусть ρ и φ — отношения на множестве людей A, определенные следующим образом:

- $x\rho y$, если и только если x — мать y;
- $x\varphi y$, если и только если x — отец y.

Имеем $<x, y> \in \varphi \circ \rho$ тогда и только тогда, когда x — бабушка по линии отца для y. И $<x, y> \in \rho \circ \varphi$, тогда и только тогда, когда x — дедушка по линии матери для y.

2. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$, а $C = \{s, t, r, q\}$, и пусть отношения ρ на $A \times B$ и φ на $B \times C$ заданы в виде:

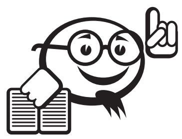
$$\rho = \{<1, x>, <1, y>, <3, x>\};$$
$$\varphi = \{<x, s>, <x, t>, <y, r>, <y, q>\}.$$

Тогда

$$\varphi \circ \rho = \{<1, s>, <1, t>, <1, r>, <1, q>, <3, s>, <3, t>\},$$

поскольку

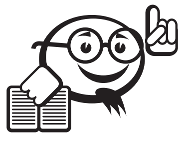
- из $<1, x> \in \rho$ и $<x, s> \in \varphi$ следует $<1, s> \in \varphi \circ \rho$;
- из $<1, x> \in \rho$ и $<x, t> \in \varphi$ следует $<1, t> \in \varphi \circ \rho$;
- из $<1, y> \in \rho$ и $<y, r> \in \varphi$ следует $<1, r> \in \varphi \circ \rho$;
- ...;
- из $<3, x> \in \rho$ и $<x, t> \in \varphi$ следует $<3, t> \in \varphi \circ \rho$.



Теорема 4. Для любых отношений выполняются следующие свойства:

$$\left(\rho^{-1}\right)^{-1} = \rho;$$
$$(\gamma \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \gamma^{-1}.$$

Доказательство. Первое свойство очевидно. Для доказательства второго свойства покажем, что множества, записанные в левой и правой частях равенства, состоят из одних и тех же элементов. Действительно, $<x, z> \in (\gamma \circ \varphi)^{-1} \Leftrightarrow <z, x> \in \gamma \circ \varphi \Leftrightarrow$ существует y такое, что $<z, y> \in \varphi$ и $<y, x> \in \gamma \Leftrightarrow$ существует y такое, что $<y, z> \in \varphi^{-1}$ и $<x, y> \in \gamma^{-1}$ тогда и только тогда, когда $<x, z> \in \varphi^{-1} \circ \gamma^{-1}$.



Теорема 5. Композиция отношений является ассоциативной операцией.

Доказательство. Пусть даны три отношения $\rho \subseteq A \times B$, $\varphi \subseteq B \times C$ и $\gamma \subseteq C \times D$. Докажем, что $(\gamma \circ \varphi) \circ \rho = \gamma \circ (\varphi \circ \rho)$. Действительно, $<a, d> \in (\gamma \circ \varphi) \circ \rho \Leftrightarrow <a, b> \in \rho$ и $<b, d> \in \gamma \circ \varphi$ для некоторых $b \in B \Leftrightarrow <a, b> \in \rho$ и $<b, c> \in \varphi$ и $<c, d> \in \gamma$ для некоторых $b \in B$ и $c \in C \Leftrightarrow <a, c> \in \varphi \circ \rho$ и $<c, d> \in \gamma$ для некоторых $c \in C \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow <a, d> \in \gamma \circ (\varphi \circ \rho)$.

Определим некоторые свойства отношений.

- *Отношение ρ на множестве X называется **рефлексивным**, если для любого элемента $x \in X$ выполняется $x\rho x$.*
- *Отношение ρ на множестве X называется **симметричным**, если для любых $x, y \in X$ из $x\rho y$ следует $y\rho x$.*
- *Отношение ρ на множестве X называется **транзитивным**, если для любых $x, y, z \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho z$ следует $x\rho z$.*
- *Отношение ρ на множестве X называется **антисимметричным**, если для любых $x, y \in X$ из $x\rho y$ и $y\rho x$ следует $x = y$.*

Замечание 1. Если для отношения ρ вообще не существует таких x, y и z, чтобы выполнялось $<x, y> \in \rho$ и $<y, z> \in \rho$, то отношение транзитивно.

Замечание 2. Если для отношения ρ вообще не существует таких x и y, чтобы выполнялось $<x, y> \in \rho$ и $<y, x> \in \rho$, то отношение антисимметрично.

Обоснование этих двух утверждений см. в параграфе 5.1 главы 5.

Пример 5

1. Пусть отношение ρ задано на множестве $\mathbf{R}$ и $x\rho y$, если и только если $x \leqslant y$. Тогда ρ рефлексивно, потому что $x \leqslant x$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Отношение ρ не симметрично, например, $1 \leqslant 2$, но $2 \leqslant 1$ не выполнено. Отношение ρ, очевидно, является транзитивным, ибо если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$. Отношение является антисимметричным, поскольку $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$ влекут $x = y$.

2. Пусть $\rho_1 = \{<1, 2>, <2, 3>\}$, $\rho_2 = \{<1, 2>, <1, 3>\}$. Тогда отношение ρ_1 не транзитивно, так как $<1, 2> \in \rho_1$ и $<2, 3> \in \rho_1$, но $<1, 3> \notin \rho_1$. Но отношение ρ_2 является транзитивным, поскольку нет вообще таких элементов x, y и z, чтобы выполнялось условие $x\rho_2 y$ и $y\rho_2 z$.

3. Пусть A — непустое множество и $\rho = \varnothing$ (пустое отношение на A). Тогда отношение ρ является симметричным, транзитивным, антисимметричным. Если же $A = \varnothing$, то ρ еще и рефлексивно.