ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

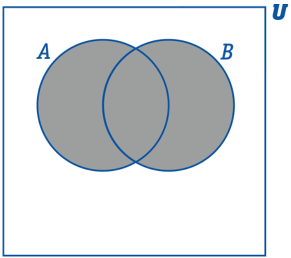
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

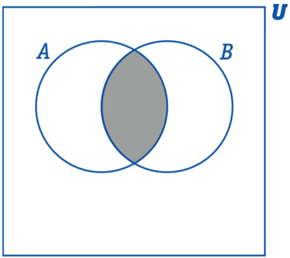
Модуль 2.2. Операции над множествами

Зюзьков Валентин Михайлович

Объединение и пересечение



$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или/и } x \in B\}$



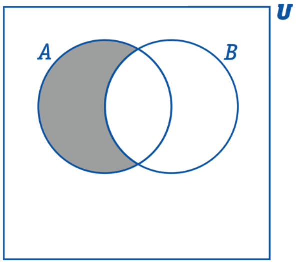
$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$

Очевидно, что выполняются включения

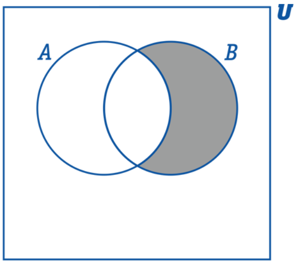
$A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ и $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.

Говорят, что два множества **не пересекаются**, если их пересечение – пустое множество ($\varnothing$).

Разность

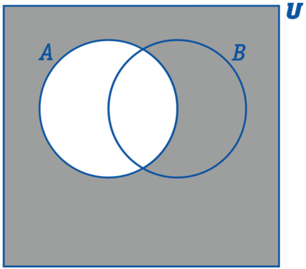


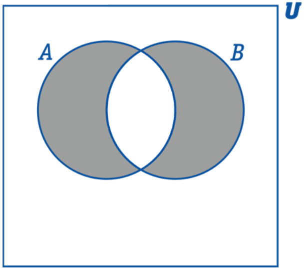
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$



$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}$

Абсолютное дополнение и симметрическая разность





$\overline{A} = \{\, x \mid x \in U \text{ и } x \notin A \,\}$

$\overline{A} = \neg A$

$\neg A = U \setminus A$

$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) =$

$= (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Объединение, пересечение и дополнение обычно называются **булевскими операциями**, составленные из множеств с их помощью выражения – **булевыми выражениями**, значение такого выражения – булевой комбинацией входящих в него множеств, а равенство двух булевых выражений – **булевым тождеством**.

Теорема. Для любых подмножеств A, B и C универсума U выполняются следующие основные булевы тождества

1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$)

1'. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$)

2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$)

2'. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$)

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$)

3'. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$)

4. $A \cup \varnothing = A$

4'. $A \cap U = A$

5. $A \cup \neg A = U$

5'. $A \cap \neg A = \varnothing$

6. $A \cup A = A$ (1-й закон идемпотентности)

6'. $A \cap A = A$ (2-й закон идемпотентности)

7. $A \cup U = U$

7'. $A \cap \varnothing = \varnothing$

8. $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ (1-й закон де Моргана)

8'. $\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$ (2-й закон де Моргана)

9. $A \cup (A \cap B) = A$ (1-й закон поглощения)

9'. $A \cap (A \cup B) = A$ (2-й закон поглощения)

Доказательство тождества $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$)

Сначала покажем, что $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ или $x \in B \cap C$.

Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Теперь покажем, что $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A$ или $x \in B$ и $x \in C \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A$ или $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.

Доказательство тождества $\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$ (1-й закон де Моргана)

Пусть $x \in \neg(A \cup B)$. Тогда $x \in \boldsymbol{U}$ и $x \notin A \cup B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow x \in \neg A$ и $x \in \neg B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \neg A \cap \neg B$.

Итак, $\neg(A \cup B) \subseteq \neg A \cap \neg B$.

Пусть теперь $x \in \neg A \cap \neg B$.

Тогда $x \in \neg A$ и $x \in \neg B \Rightarrow x \in \boldsymbol{U}$ и $x \notin A$ и $x \notin B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \neg(A \cup B)$.

Итак, $\neg A \cap \neg B \subseteq \neg(A \cup B)$.

Благодарю за внимание!