ТУСУР | TUSUR UNIVERSITY

Томский государственный университет
систем управления и радиоэлектроники

ГЛАВА 2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Модуль 2.1. Интуитивная теория множеств

Зюзьков Валентин Михайлович

Элемент x принадлежит множеству S: $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{S}$.

Множество всех объектов x, обладающих свойством $A(x)$, обозначается $\boldsymbol{\{x \mid A(x)\}}$.

Если $Y = \{x \mid A(x)\}$, то $A(x)$ называется **характеристическим свойством** множества Y.

Интуитивный принцип абстракции

Любое характеристическое свойство $A(x)$ определяет некоторое множество X, а именно множество тех и только тех предметов x, для которых выполнено свойство $A(x)$.

Примеры множеств и их обозначения

Множество, элементами которого являются объекты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и только они, обозначают $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

1. {Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун};
2. **{**{Земля, Луна}, {Юпитер и еще не менее 67 его спутников}, {Марс, Фобос, Деймос}**}** – множество из трех элементов, которые сами являются множествами;
3. $\{x \mid x$ – простое натуральное число$\}$;
4. $\{\{x, Y\} \mid x$ – планета Солнечной системы, Y – множество спутников планеты $x\}$.

Множества A и B считаются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов (их характеристические свойства эквивалентны).

Записывают $A = B$ и $A \neq B$ – в противном случае.

$\{a, b\} = \{b, a\}, \{a, a\} = \{a\}.$

Пример

$A = B$

A – множество всех положительных четных чисел.

B – множество всех положительных целых чисел, представимых в виде суммы двух положительных нечетных чисел.

$$x \in A \Rightarrow x = 2m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = (2m - 1) + 1 \Rightarrow x \in B.$$

$$x \in B \Rightarrow x = (2p - 1) + (2q - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 2(p + q - 1) \Rightarrow x \in A.$$

Подмножества и включения

Множество A есть **подмножество** множества B (обозначается $A \subseteq$ B), если каждый элемент A есть элемент B; т. е. если $x \in A$, то $x \in B$.

Если A не является подмножеством B, то, значит, существует элемент A, не принадлежащий B.

Отношение $\subseteq$ между множествами называется **отношением включения.**

Пример

- $\{1\} \in \{\{1\}, 2\}$;
- $\{1\}$ – не подмножество $\{\{1\}, 2\}$;
- $2 \in \{\{1\}, 2\}$;
- $\{2\} \subseteq \{\{1\}, 2\}$.

Пустое множество и утверждения для произвольных множеств

Множество, не содержащее элементов, называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

Для любого множества X справедливо

$\varnothing \subseteq X$.

Для произвольных множеств справедливо:

а) $X \subseteq X$;

б) если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$;

в) если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

Парадокс Рассела

Принцип абстракции: если X – множество, то для любого условия A имеем $\{x \mid x \in X \text{ и } A(x)\}$ – также множество.

Свойство $A(x)$ – «x не содержит себя в качестве элемента».

Пусть $\boldsymbol{U}$ – универсум – **множество всех множеств**, тогда можно определить множество $Y = \{x \mid x \in \boldsymbol{U} \text{ и } A(x)\} = \{x \mid x \in \boldsymbol{U} \text{ и } x \notin x\}$.

Спрашивается, выполняется ли $\boldsymbol{Y} \in \boldsymbol{Y}$ или $\boldsymbol{Y} \notin \boldsymbol{Y}$?

$Y \in Y \Rightarrow Y \notin Y$

$Y \notin Y \Rightarrow Y \in Y$

Любое из двух предположений $Y \in Y$ и $Y \notin Y$ влечет **противоположное утверждение.**

Благодарю за внимание!