Модуль 2.1. Интуитивная теория множеств

Понятие множества является основным, неопределяемым понятием, поэтому мы можем его только пояснить, например с помощью следующего *псевдоопределения*. Под ***множеством*** S будем понимать любое собрание определенных и различимых между собою объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются ***элементами множества*** S.

В этом интуитивном определении, принадлежащем немецкому математику Георгу Кантору, существенным является то обстоятельство, что собрание предметов само рассматривается как один предмет, мыслится как единое целое. Что касается самих предметов, которые могут входить во множество, то относительно них существует значительная свобода. Это может быть множество студентов в аудитории, множество целых чисел, множество точек плоскости. Заметим, что канторовская формулировка позволяет рассматривать множества, элементы которых по той или иной причине нельзя точно указать (например, множество простых чисел, множество белых носорогов и т. п.). Не следует думать, что множество обязательно должно содержать в каком-то смысле однородные объекты. Можно объединить в одно множество и королей, и капусту.

Символом $\in$ обозначается ***отношение принадлежности***. Это понятие также не определяется формально. Запись $x \in S$ означает, что элемент x принадлежит множеству S. Если элемент x не принадлежит множеству S, то пишут $x \notin S$.

Г. Кантором сформулировано несколько интуитивных принципов, которые естественно считать выполняющимися для произвольных множеств.

Множество всех объектов x, обладающих свойством $A(x)$, обозначается $\{x \mid A(x)\}$. Если $Y = \{x \mid A(x)\}$, то $A(x)$ называется ***характеристическим свойством*** множества Y.

Интуитивный принцип абстракции*. Любое характеристическое свойство $A(x)$ определяет некоторое множество X, а именно множество тех и только тех предметов x, для которых выполнено свойство $A(x)$.*

Интуитивный принцип объемности*. Множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. (Часто это выражают словами: «Множества равны, если их характеристические свойства эквивалентны»).*

Записывают $A = B$, если A и B равны, и $A \neq B$ — в противном случае.

Пример 1

Проиллюстрируем принцип объемности. Множество A всех положительных четных чисел равно множеству B положительных целых чисел, представимых в виде суммы двух положительных нечетных чисел. Действительно, если $x \in A$, то для некоторого целого положительного числа m имеем $x = 2m$; тогда $x = (2m - 1) + 1$, т. е. $x \in B$. Если $x \in B$, то для некоторых целых положительных p и q имеем $x = (2p - 1) + (2q - 1) = 2(p + q - 1)$, т. е. $x \in A$.

Множество, элементами которого являются объекты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и только они, обозначают $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Его определение через характеристическое свойство:

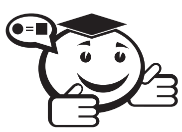
$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{x \mid x = a_1 \text{ или } x = a_2 \text{ или } \ldots \text{ или } x = a_n\},$$

где «или» является ***неразделительным***[1]. Исходя из этого тождества можно видеть, в частности, что

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \{a, a\} = \{a\}.$$

В общем случае порядок, в котором элементы расположены при описании множества, не имеет значения; не имеет значения также возможность неоднократного повторения одних и тех же элементов при описании множества.

Стоит отметить еще одну тонкость. Нужно строго различать x и $\{x\}$. Первое выражение обозначает сам элемент, а второе — множество, содержащее этот один элемент. Разница между ними примерно такая же, как между шимпанзе и шимпанзе, посаженным в клетку в зоопарке: $\{x\}$ скорее похоже на такую клетку, чем на ее обитателя.



*Множество A есть **подмножество** множества B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент A есть элемент B; т. е. если $x \in A$, то $x \in B$. В частности, каждое множество есть подмножество самого себя. Если A не является подмножеством B, то, значит, существует элемент A, не принадлежащий B. Отношение $\subseteq$ между множествами называется отношением **включения**.*

Следовательно, $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$, но $\{1, 2, 5\}$ не является подмножеством множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Если $A = \{x \mid x$ — футболист факультета$\}$, $B = \{x \mid x$ — спортсмен факультета$\}$, а $C = \{x \mid x$ — самый сильный математик факультета$\}$, то $A \subseteq B$, а C не является подмножеством B в общем случае.

Заметим, что имеют место утверждения для произвольных множеств:

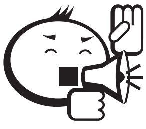
а) $X \subseteq X$;

б) если $X \subseteq Y$, $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$;

в) если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$, то $X = Y$.

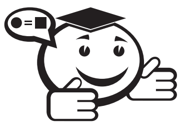
[1]В русском языке «разделительное или» употребляется при соотнесении однородных членов предложения или целых предложений (по значению взаимоисключающих или заменяющих друг друга), указывая на необходимость выбора между ними. Пример: Сходи в магазин и купи там яблоки или апельсины.

«Неразделительное или» употребляется, чтобы передать смысл «то или другое или оба вместе». Иногда письменно передается конструкцией «или/и». Пример: Целое число n делится на 2 или/и на 3.

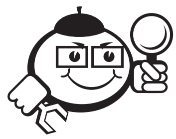


Теперь мы можем утверждать, что доказательство равенства множеств A и B состоит из двух этапов:

1. Доказать, что A есть подмножество B.
2. Доказать, что B есть подмножество A.



Множество A есть ***собственное подмножество*** *множества B (обозначается $A \subset B$), если $A \subseteq B$ и $A \neq B$. Если A не является собственным подмножеством B, то это означает, что либо $A = B$, либо существует элемент A, не принадлежащий B. Отношение $\subset$ между множествами называется отношением* ***строгого включения****.*



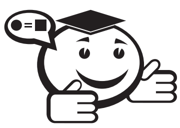
Пример 2

В математике широко используются следующие множества чисел (с соответствующими обозначениями):

- множество натуральных чисел — $\mathbf{N}$ (считаем, что $0 \in \mathbf{N}$);
- множество целых чисел — $\mathbf{Z}$;
- множество рациональных чисел — $\mathbf{Q}$;
- множество вещественных чисел — $\mathbf{R}$;
- множество комплексных чисел — $\mathbf{C}$.

Для этих множеств выполнены строгие включения: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Очевидно, для произвольных множеств, если $X \subset Y$, $Y \subset Z$, то $X \subset Z$.

Не надо смешивать отношения принадлежности и включения. Например, имеем $\{1\} \in \{\{1\}\}$ и $\{1\}$ не является подмножеством $\{\{1\}\}$. С другой стороны, $1 \notin \{\{1\}\}$, так как единственным элементом множества $\{\{1\}\}$ является элемент $\{1\}$.



Множество, не содержащее элементов, называется ***пустым*** *и обозначается $\varnothing$.*

Пустое множество есть подмножество любого множества. Очевидно, что пустое множество задается тождественно ложным характеристическим свойством, и соответственно все пустые множества равны. Поэтому считается, что множество квадратных кругов равно множеству белых ворон.

Множество всех подмножеств A называется ***множеством-степенью*** *и обозначается* $\boldsymbol{P}(A)$.

Пример 3

Если $A = \{1, 2, 3\}$, то $\boldsymbol{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$.

В дальнейшем неоднократно будем пользоваться утверждением, что если множество A состоит из n элементов, то множество $\boldsymbol{P}(A)$ состоит из 2^n элементов.

Расплывчатость, недостаточность канторового определения понятия множества стала понятной, когда в 1879 году итальянский логик Бурали-Форти, а немного позже выдающийся философ и логик Бертран Рассел открыли парадоксы, связанные с понятием множества.

В математике рассматривается одна теория — теория множеств, которая длительное время претендовала на выразимость в ней всех математических понятий. В ней пытаются базироваться на одних лишь множествах, и тогда ее универсум (собрание, совокупность) должен быть множеством всех множеств. Но выяснилось, что принятие существования множества всех множеств приводит к парадоксам.

Так, например, одна из аксиом «наивной» теории множеств: если X — множество, то для любого условия A имеем $\{x \mid x \in X \text{ и } A(x)\}$ — также множество. Выберем теперь свойство A следующим образом: $A(x)$ — «x не содержит себя в качестве элементов». Примером множества, обладающего свойством A, служит, например, любое конечное множество. Если обозначить через $\boldsymbol{U}$ универсум — множество всех множеств, то тогда можно определить множество

$Y = \{x \mid x \in \boldsymbol{U} \text{ и } A(x)\} = \{x \mid x \in \boldsymbol{U} \text{ и } x \notin x\}$. Спрашивается, выполняется ли $Y \in Y$ или $Y \notin Y$? Любое из этих двух предположений влечет противоположное утверждение.

Этот парадокс впервые обнаружил Бертран Рассел. Другая, более популярная форма этого парадокса известна как парадокс брадобрея (см. параграф 1.3 главы 1).

Парадокс Рассела и другие трудности, связанные с неограниченным использованием абстрактных понятий в математике, свидетельствовали о кризисе математики на рубеже XIX и XX веков. В частности, о том, что широко используемая теория множеств в ее интуитивном, «наивном» изложении является противоречивой. Например, для устранения таких противоречий и парадоксов для теории множеств были предложены аксиоматические теории (см. главу 6).