Модуль 1.7. Математическая логика в своем блеске и великолепии

Геттингенская программа

В двадцатых годах XX века с программой обоснования математики на базе математической логики выступил знаменитый немецкий математик Гильберт (1862–1943 гг., рис. 1) — немецкий математик-универсал.

Рис. 1 – Давид Гильберт

Гильберт, вокруг которого сложилась к тому времени школа блестящих последователей, в целой серии работ наметил план исследований в области оснований математики, получивший впоследствии название «Геттингенской программы».

В максимально упрощенном виде ее можно изложить следующим образом: математику можно представить в виде набора следствий, выводимых из некоторой системы аксиом, и доказать, что:

1. Математика является ***полной***, т. е. любое математическое утверждение можно доказать или опровергнуть, основываясь на правилах самой дисциплины.
2. Математика является ***непротиворечивой***, т. е. нельзя доказать и одновременно опровергнуть какое-либо утверждение, не нарушая принятых правил рассуждения.
3. Математика является ***разрешимой***, т. е., пользуясь правилами, можно выяснить относительно любого математического утверждения, доказуемо оно или опровержимо.

Фактически программа Гильберта стремилась выработать некую общую процедуру для ответа на все математические вопросы или хотя бы доказать существование таковой.

Сам ученый был уверен в утвердительном ответе на все три сформулированных им вопроса: по его мнению, математика действительно была полной, непротиворечивой и разрешимой. Оставалось только это доказать.

С этого времени и начинается современный этап развития математической логики, характеризующийся применением точных математических методов при изучении формальных аксиоматических теорий.

Заметим, что роль логического исчисления как средства открытия новых истин даже в области математики долго оставалась более чем скромной. Зато символический язык математической логики оказался на границе девятнадцатого и двадцатого веков очень важным подспорьем в изучении логических основ математики, поскольку он позволял избегать всякой неточности мысли, которая легко проскальзывает при использовании слов обычного языка, смысл которых дается не точным определением, а созданием привычки к принятому словоупотреблению.

Теоремы Гёделя

«Principia Mathematica», труд Рассела и Уайтхеда, строго обосновал математику на основе логики, но сюрпризы были обнаружены в самой логике.

Для любой математической теории, определенной с помощью множества аксиом, возникают два вопроса: является ли теория непротиворечивой и полной. Непротиворечивость теории означает, что, делая логические следствия из аксиом, мы получаем только истинные утверждения. Полнота означает, что все истинные утверждения теории можно вывести из ее аксиом.

Рис. 2 – Курт Гёдель

В 1931 году Курт Гёдель (1896–1978 гг., рис. 2) — австрийский логик и математик — доказал, что бесконечное множество математических утверждений являются истинными, но не могут быть доказаны, исходя из аксиом «Principia Mathematica». Он также установил, что попытка свести математику к непротиворечивой системе аксиом дает тот же самый результат: существует бесконечное множество математических истин, называемых ***неразрешимыми*** утверждениями, которые недоказуемы с помощью этой системы.

Этот результат, называемый ***теоремой о неполноте***, сразу выдвинул Гёделя в число великих математиков XX века.

Второй результат — ***теорема о непротиворечивости*** — утверждает, что непротиворечивость любой аксиоматической теории не может быть доказана средствами самой теории.

В сущности, теорема Гёделя о неполноте похоронила надежды Лейбница о существовании логического метода, который мог бы вычислить ответ на все научные вопросы. Логика, по крайней мере в настоящем виде, недостаточна, чтобы доказать каждую математическую истину, тем более любую истину в нашем мире.

Теоремы Гёделя показали, что Геттингенская программа Гильберта нереализуема.

Неклассическая логика

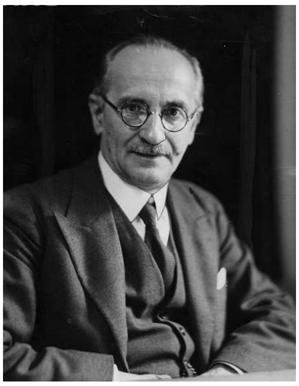


Рис. 3 – Ян Лукасевич

Сведение математики и логики к небольшому списку аксиом естественно вызвало вопрос: что произойдет, если исходные аксиомы будут другими?

Например, позволить утверждениям иметь не только два истинностных значения «истина» и «ложь», но и третье значение, выражаемое словами «возможно» («вероятно», «нейтрально»). Другими словами, отказаться от аксиомы «Закон исключенного третьего» (см. главу 6). Древние греки считали невыполнение этого закона немыслимым нарушением логических рассуждений, но описание логики просто как аксиоматической системы (теории) сделало это допустимым.

В 1917 году Ян Лукасевич (1878–1956 гг., рис. 3) — польский логик, был первым, кто стал рассматривать *многозначные логики*, введя третье истинностное значение «возможно». В такой логике возможно определять истинностные значения утверждений, подобных следующему:

В 2030 году человечество колонизирует Марс.

Добавление значения «возможно» к «истина» и «ложь» стало первым радикальным отступлением от ***классической логики*** — всей той логики, которая была до этого. Возникла новая ветвь логики — ***неклассическая логика*** (см. [1]).

Эра компьютеров

Появление компьютеров связано с развитием такого раздела математической логики, как теория алгоритмов. Развитие мышления в области математических наук всегда было в наибольшей степени алгоритмичным по сравнению с прочими науками, тем не менее всеобщая компьютеризация еще более отчетливо выявила эту сторону математического мышления.

Не менее тесная связь методов математической логики и современных компьютеров прослеживается по следующим двум направлениям. Во-первых, математическая логика используется при физическом конструировании и создании компьютеров (алгебра высказываний и булевы функции — математический аппарат для конструирования переключательных и функциональных схем, составляющих элементную базу компьютеров).

Во-вторых, программное обеспечение современных компьютеров широко использует математическую логику. В основе многочисленных языков программирования лежат теория алгоритмов, теория формальных систем, логика предикатов. Такие парадигмы программирования, как логическое (язык Prolog) и функциональное программирование (язык Haskell), основаны на применении логических теорий: автоматического доказательства теорем и лямбда-исчисления соответственно. Кроме того, синтез логики и компьютеров привел к возникновению баз знаний и экспертных систем, что явилось важнейшим этапом на пути к созданию искусственного интеллекта — машинной модели человеческого разума.

Основной вклад в теорию алгоритмов сделали Чёрч и Тьюринг. Алонзо Чёрч (1903–1995 гг., рис. 4) американский математик и логик — прославился разработкой теории лямбда-исчисления, последовавшей за его знаменитой статьёй 1936 года, в которой он показал существование алгоритмически неразрешимых задач. Эта статья предшествовала знаменитому исследованию Алана Тьюринга на тему проблемы остановки, в котором также было продемонстрировано существование задач, неразрешимых механическими способами. Впоследствии Чёрч и Тьюринг показали, что лямбда-исчисления и машина Тьюринга имели одинаковые свойства, таким образом доказывая, что различные «алгоритмические процессы вычислений» могли иметь одинаковые возможности. Эта работа была оформлена как тезис Чёрча.

Алан Тьюринг (1912–1954 гг., рис. 5) — английский математик и логик — доказал, что проблема остановки для машины Тьюринга неразрешима: в общем случае невозможно алгоритмически определить, остановится ли когда-нибудь данная машина Тьюринга. Хотя доказательство Тьюринга было обнародовано в скором времени после эквивалентного доказательства Алонзо Чёрча, в котором использовалось лямбда-исчисление, сам Тьюринг был с ним не знаком. Подход Алана Тьюринга принято считать более доступным и интуитивным. Идея «Универсальной Машины», способной выполнять функции любой другой машины или, другими словами, вычислить всё, что можно в принципе вычислить, была крайне оригинальной.

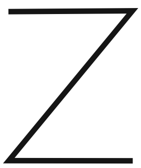
В главе 8 мы более подробно познакомимся с работами Чёрча и Тьюринга.

Рис. 4 – Алонзо Чёрч

Рис. 5 – Алан Тьюринг

Бурбаки

Николя Бурбаки (фр. *Nicolas Bourbaki*) — собирательный псевдоним, под которым группа математиков разных стран, преимущественно французских, выступила с проектом дать систематическое изложение современной математики на основе аксиоматического метода. Образовалась группа в 1935 году из бывших питомцев Высшей нормальной школы. Численность и точный состав группы не разглашался, но известно, что лидерами ее стали известные математики Андре Вейль, Жан Дельсарт, Жан Дьёдонне, Анри Картан и Клод Шевалле. В многотомном трактате «***Начала математики***» (Eléments de Mathématique), выходящем с 1939 года, развивается формальная аксиоматическая система, которая, по замыслу авторов, должна охватить главнейшие разделы математики. Основные принципы изложений: единство и полная формализация математики на основе теории множеств; систематичность; догматизм и самодостаточность; изложение, всегда идущее от общего к частному; ключевая роль понятия «структуры». Изложение носит сугубо абстрактный характер. Структуры определяются посредством аксиом, например: структуры порядка, группы, топологические структуры. Способ рассуждения — от общего к частному. Классификация математики, производимая по типам структур, значительно отличается от традиционной.



В книгах Бурбаки были впервые введены символ для пустого множества $\varnothing$; символы **N**, **Z**, **Q**, **R**, **C** для множеств натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел; термины «*инъекция*», «*сюръекция*» и «*биекция*» (см. главу 3); знак «опасный поворот» на полях книги, показывающий, что данное место в доказательстве может быть неправильно понято.

В трактате все математические теории описываются на основании аксиоматической теории множеств в духе крайней абстракции. Например, определение обыкновенного натурального числа 1 в «Теории множеств» даётся следующим образом:

$$\begin{gathered}
\tau_z\Big((\exists u)(\exists U)\Big(u = (U, \{\varnothing\}, Z) \text{ и } U \subset \{\varnothing\} \times Z \\
\text{и } (\forall x)\Big(\big(x \in \{\varnothing\}\big) \Rightarrow (\exists y)\big((x, y) \in U\big)\Big) \\
\text{и } (\forall x)(\forall y)(\forall y')\Big(\big((x, y) \in U \text{ и } (x, y') \in U\big) \Rightarrow (y = y')\Big) \\
\text{и } (\forall y)\Big((y \in Z) \Rightarrow (\exists x)\big((x, y) \in U\big)\Big) \\
\text{и } (\forall x)(\forall x')(\forall y)\Big(\big((x, y) \in U \text{ и } (x', y) \in U\big) \Rightarrow (x = x')\Big)\Big)\Big).
\end{gathered}$$

Причём, учитывая, что в этой записи уже сделаны сокращения, например пустое множество $\varnothing$ определяется в языке теории множеств Бурбаки как

$$\tau\neg\neg\neg\in\tau\neg\neg\neg\in\Box\Box\Box,$$

мы получаем, что полная запись обыкновенной единицы состоит из 4 523 659 424 929 символов [2]!

Деятельность этого коллектива принесла существенные плоды в таких областях математики, как топология, топологическая алгебра, алгебра, теория алгебраических чисел, функциональный анализ и др. Во Франции написано более 40 книг этого трактата. В 1959–1987 годах были переведены на русский язык более 20 томов. В 1968 году Бурбаки объявил о прекращении своей деятельности. Задуманный трактат остался незаконченным.

Математика XX века восприняла влияние формалистких взглядов Н. Бурбаки: «...стиль практически всех научных работ по математике в период от пятидесятых по семидесятые годы постепенно изменился в сторону формализации, стал в той или иной степени походить на формально-бурбакистскую манеру, притом, как правило, этот процесс происходил неосознанно» [3].

Строгость изложения в книгах Бурбаки в какой-то мере сформировала современный стандарт строгости математических текстов.

Г. Штейнгауз [4]*: «Но невозможно обучение математике по работам Николя Бурбаки, потому что ученики лишены способности познания той математики, которая представляет собой «нечто вроде экспериментальной физики», и поэтому преподаватели обязаны указывать одной рукой в уже пройденное прошлое, а другой — в еще неизвестное будущее...».*

Список литературы по модулю

[1] Непейвода Н. Н. Прикладная логика : учеб. пособие / Н. Н. Непейвода. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.

[2] Mathias A. R. D. A Term of Length 4529659424929 / A. R. D. Mathias. — Synthese. — 2002. — N 133. — P. 75–86.

[3] Сосинский А. Б. Умер ли Бурбаки? // Математическое просвещение. — 1998. — Вып. 2.

[4] Штейнгауз Г. Математика — посредник между духом и материей : пер. с польск. / Г. Штейнгауз. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 351 с.