Модуль 1.6. Начало математической логики

После своего зарождения большей частью логика изучалась неформально, т. е. без использования символов вместо слов. Но в конце XIX столетия математики развили ***символическую логику***, в которой вычисляемые символы заменили слова и утверждения. Три ключевых вклада в символическую логику сделали Джордж Буль (1815–1864 гг., рис. 1) — английский математик и логик, Георг Кантор (1845–1918 гг., рис. 2) — немецкий математик и Готлоб Фреге (1848–1925 гг., рис. 3) — немецкий логик, математик и философ.

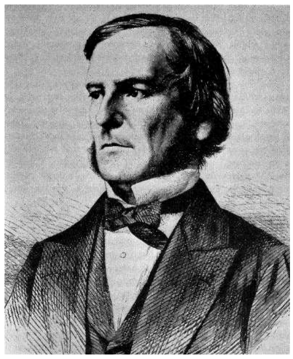


Рис. 1 – Джордж Буль

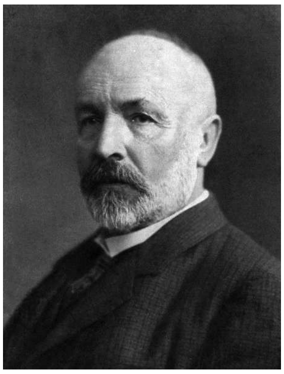
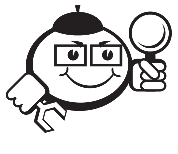


Рис. 2 – Георг Кантор

Рис. 3 – Готлоб Фреге

Названная так по имени ее открывателя, ***булева алгебра*** была первой разработанной системой, которая рассматривала логику как исчисление. Поэтому булеву алгебру можно считать предшественником математической логики. Булева алгебра подобна стандартной арифметике — два значения: 0 и 1 (ложь и истина) и две операции: умножение и сложение (конъюнкция и дизъюнкция). Буль не считал логику разделом математики, но находил глубокую аналогию между символическим методом алгебры и символическим методом представления логических форм и силлогизмов.



Пример

Пусть имеется два утверждения: A и B соответственно:

A: «*Волга впадает в Каспийское море*»;
B: «*Ангара впадает в озеро Байкал*».

Так как первое утверждение истинное, а второе ложное, мы можем сказать: $A = 1$ и $B = 0$.

В булевой алгебре сложение интерпретируется как «*или*», так что утверждение

«*Волга впадает в Каспийское море или Ангара впадает в озеро Байкал*»

вычисляется как $A + B = 1 + 0 = 1$.

Так как булевское выражение имеет значение 1, то это утверждение — истина.

Георг Кантор — первооткрыватель теории множеств, влияние которой на логику и математику трудно переоценить.

Неформально говоря, любое ***множество*** есть просто совокупность (собрание) некоторых объектов (элементов), которые могут иметь что-то общее между собой, или между элементами может не быть ничего общего.

Пример

Пять примеров множеств:

- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$ — бесконечное множество, содержащее все простые числа;
- {пешка, конь, слон, ладья, ферзь, король};
- $\big\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\big\}$ — множество из трех элементов, которые сами являются множествами;
- {Африка, Байкал, ноябрь, дыхание, Млечный путь, красота};
- множество людей, погибших во Второй мировой войне.

Простая конструкция множеств является чрезвычайно эффективной для описания важных и фундаментальных идей логики. Например, рассмотрим утверждение:

«*Названия всех штатов США, содержащие букву z, начинаются с буквы A*».

Это утверждение можно проверить, определив два множества:

- множество всех штатов, названия которых содержат букву z;
- множество штатов, названия которых начинается с буквы A.

Множество 1: {Arizona}

Множество 2: {Alabama, Alaska, Arizona, Arkansas}

Как вы видите, каждый элемент первого множества является элементом второго множества. Поэтому первое множество является ***подмножеством*** второго множества, так что исходное утверждение истинно.

Несмотря на очевидную простоту — или, скорее, благодаря этой простоте — теория множеств вскоре стала основанием логики и, более того, основанием современной математики. Но нельзя сказать, что теорию множеств математики — современники Кантора — все восприняли с воодушевлением. После публикации идей Кантора об актуальной бесконечности, теоретико-множественный подход встретил острое неприятие многими крупными математиками того времени. Основными оппонентами в то время были немецкие математики Герман Шварц (1843–1921 гг.) и, в наибольшей степени, Леопольд Кронекер (1823–1891 гг.), полагавший, что математическими объектами могут считаться лишь натуральные числа и то, что к ним непосредственно сводится (известна его фраза о том, что «Бог создал натуральные числа, а всё прочее — дело рук человеческих»).

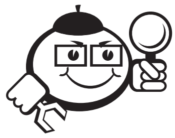
Тем не менее к концу XIX века теория множеств стала общепризнанной после успешного использования теории множеств в анализе, а также особенно после широкого применения Давидом Гильбертом теоретико-множественного инструментария.

Теория множеств детально излагается в главе 3.

Готлоб Фреге ввел первые реальные системы формальной логики: логику высказываний и объемлющую её логику предикатов.

Логика высказываний, называемая также ***пропозициональной логикой*** (см. главу 4), использует буквы для обозначения простых утверждений (высказываний), которые соединяются вместе в сложное высказывание с помощью логических операций (связок).

Пять операций логики высказываний в русском языке можно передать словами: «не», «и», «или», «если…, то», «тогда и только тогда».



Пример

Пусть имеются

высказывание A: «Лена едет в трамвае»,

высказывание B: «Петя находится дома».

Тогда мы можем определить сложные высказывания:

«Лена едет в трамвае *и* Петя находится дома»;

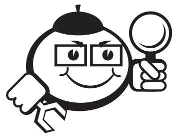
«*Если* Лена *не* едет в трамвае, *то* Петя находится дома».

Полученные высказывания символически обозначаются формулами:

$$A\&B, \quad \neg A \to B.$$

В первой формуле символ & обозначает «и», во втором высказывании символ ¬ заменяет «не», а символ → обозначает «если…, то».

Более сложная система, ***логика предикатов***, расширяет логику высказываний. Используются буквы (слова) для именования объектов (предметов) из некоторой предметной области и имена для предикатов. Предикаты обозначают свойства объектов или отношения между объектами.



Пример

Пусть предикат $M(x)$ обозначает свойство людей «x едет в трамвае», а предикат $H(x)$ обозначает свойство людей «x находится дома». При этих обозначениях высказывания, записанные в виде формул пропозициональной логики $A\&B$ и $\neg A \to B$, в логике предикатов записываются теперь как

$$M(\text{Лена})\ \&\ H(\text{Петя}),$$
$$\neg M(\text{Лена}) \to H(\text{Петя}).$$

Кроме пропозициональных операций логика предикатов содержит две операции, называемыми ***кванторами***, которые служат для обозначения дополнительных конструкций, позволяющих создавать более сложные формулы. Кванторы в формулах заменяют выражения вида «для всех» и «некоторый». Например, они позволяют представить утверждения:

«*Все люди едут в трамвае*»,
«*Некоторые люди находятся дома*»

в виде формул $\forall x M(x)$ и $\exists x H(x)$ соответственно.

Логика предикатов — наиболее общий язык для классической математической логики (есть и неклассические логики) — описан в главе 5.

В конце XIX века, следуя примеру Евклида, математики стремились свести все в математике к множеству теорем, логически выводимых из небольшого числа аксиом. Фреге обнаружил возможность того, что сама математика может быть выведена из логики и теории множеств. Начиная с нескольких аксиом о множествах, он показал, что числа и, в конечном счете, вся математика следуют логически из этих аксиом.

Теория Фреге удовлетворительно работала до тех пор, пока Бертран Рассел (1872–1970 гг., рис. 4) — не обнаружил парадокс, названный впоследствии его именем (см. главу 3). Фреге не нашел как освободиться от этого противоречия.

Но Рассел сумел избавиться от подобных парадоксов в теории множеств. В 1910–1913 годы Бертран Рассел и Альфред Уайтхед (1861–1947 гг., рис. 5) написали фундаментальный труд «Principia Mathematica», в котором, используя идеи Фреге, обосновали математику на аксиомах теории множеств и логики.

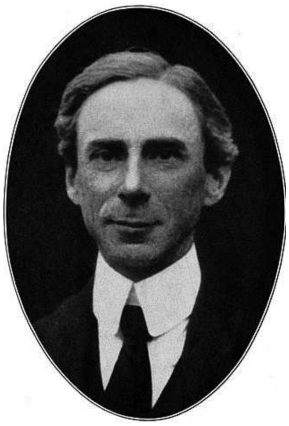


Рис. 4 – Бертран Рассел — философ, математик

Рис. 5 – Альфред Уайтхед — философ, математик, логик

Список литературы по модулю

[1] Непейвода Н. Н. Прикладная логика : учеб. пособие / Н. Н. Непейвода. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. — 521 с.

[2] Mathias A. R. D. A Term of Length 4529659424929 / A. R. D. Mathias. — Synthese. — 2002. — N 133. — P. 75–86.

[3] Сосинский А. Б. Умер ли Бурбаки? // Математическое просвещение. — 1998. — Вып. 2.

[4] Штейнгауз Г. Математика — посредник между духом и материей : пер. с польск. / Г. Штейнгауз. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 351 с.