Модуль 1.4. Математическая логика

Развитие математики на протяжении XIX в. характеризовалось стремлением к систематизации, к установлению единства в многообразии математических фактов и методов, на первый взгляд весьма далеких друг от друга. Ценным было также критическое уяснение и строгое обоснование фундаментальных понятий. Был создан богатый логический аппарат, с помощью которого создавался формальный язык математики, повышалась строгость доказательств.

Необходимость математической строгости привела к математической логике. Математическая логика выросла из философских вопросов относительно оснований математики, но в настоящее время переросла свои философские корни и стала неотъемлемой частью математики в целом.

Математическая логика – логика по предмету, математика по методу.

Логика отличается от других наук фундаментальностью рассматриваемых проблем, а математическая логика – сочетанием весьма сложного аппарата с сохранением философской глубины и с полностью неординарным взглядом на математический мир.

Задачи, решаемые математической логикой.

1. Создание формальных языков и методов в логике, более точных и эффективных, чем использовавшихся до этого.
2. Удовлетворение естественного философского интереса к основаниям математики и расширение нашего понимания математики, ее возможностей и ограничений как науки.
3. Исследование в области компьютерных наук (computer science).

Решение этих задач во многом обеспечивается реализацией следующей идеи: записывать математические утверждения в виде последовательностей символов и оперировать с ними по формальным правилам. При этом правильность рассуждений можно проверять только по синтаксическим правилам, не рассматривая семантику (смысл) утверждений.

Принято считать, что всякое точно сформулированное математическое утверждение можно записать формулой теории множеств (одной из наиболее общих формальных теорий), а всякое строгое математическое доказательство преобразовать в формальный вывод в этой теории (последовательность формул теории множеств, подчиняющуюся некоторым простым правилам).

Если говорить о решении конкретных математических задач, то математическая логика больше мешает, чем помогает, – ибо задумывалась как метаматематическая дисциплина, призванная наблюдать математику извне. Не способствовать доказательству теорем, а извне оценивать сам процесс обоснования.

Рэймонд Смаллиан[1] (рис. 1) писал: «Многие люди спрашивают меня, что такое математическая логика и какова ее цель. К сожалению, ни одно простое определение не может дать даже самое отдаленное понимание математической логики. Только после погружения в этот предмет его сущность становится очевидной. Что касается *цели*, то существует множество целей, но, снова, можно понять их только после некоторого изучения предмета. Тем не менее есть одна цель, и ее я могу сказать вам прямо сейчас: сделать точным понятие *доказательства*».

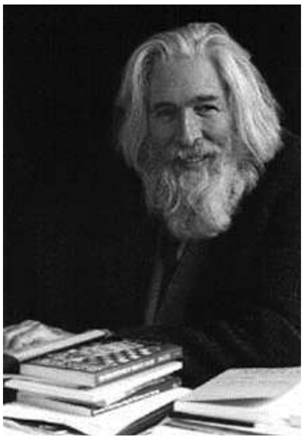

Рис. 1 – Рэймонд Смаллиан

Очень важна роль математической логики в основаниях математики. Основания математики — особая сфера исследований оформилась в начале XX в. в связи с проблемой устранения парадоксов, обнаружившихся в теории множеств. Первая задача этих исследований состоит в обосновании строгости признанных доказательств и освобождении существующих математических теорий от парадоксов известных типов. Вторая — в выявлении условий полной надежности математической теории в смысле строгости доказательств и отсутствия противоречий. Первую задачу в настоящее время следует считать в целом решенной, поскольку имеются достаточные основания полагать формализованные доказательства абсолютно строгими (свободными от контрпримеров) и поскольку указаны приемлемые ограничения формулировки аксиом теории множеств, гарантирующие отсутствие в ней парадоксов всех известных типов. Что касается второй задачи, то преобладающее мнение сегодня состоит в том, что она не может быть полностью решена, по крайней мере, в рамках чисто логических подходов.

Что касается компьютерных наук, то теория алгоритмов — является разделом математической логики и содержит множество важных красивых результатов.

Для лучшего понимания предмета математической логики — как соотносятся логика и реальный мир — рассмотрим задачу, предложенную Р. Смаллианом [1].

Молодая девушка Порция обладала умом, которой не уступал ее красоте. Она решила выбрать спутника жизни при помощи логической задачи. Порция заказала две шкатулки, серебряную и золотую, и в одну из них положила свой портрет. На крышках шкатулок красовались надписи.

На золотой	**На серебряной**
Портрет не в этой шкатулке	***Ровно одно из двух высказываний, выгравированных на крышках, истинно***

[1]Рэймонд Меррилл Смаллиан (англ. *Raymond Merrill Smullyan*; род. 1919 г.) — американский математик, логик, пианист, даосский философ, астроном-любитель и фокусник-престидижитатор. Автор многочисленных научно-популярных книг по логике и математике: о логических загадках и парадоксах, передовых концепциях логики, например о теореме Гёделя о неполноте. Кроме того, написал несколько книг о даосской философии, в которых предпринята попытка разрешения большинства философских проблем и интеграции математики, логики и философии.

Претенденту на руку Порции предлагалось выбрать шкатулку, и если он был достаточно удачлив (или достаточно умен), чтобы выбрать шкатулку с портретом, то получал право назвать Порцию своей невестой. Какую шкатулку выбрать?

Претендент рассуждал следующим образом. Если высказывание, выгравированное на крышке серебряной шкатулке, истинно, то это означает, что истинно ровно одно из двух высказываний. Тогда высказывание, выгравированное на крышке золотой шкатулки, должно быть ложным.

С другой стороны, предположим, что высказывание, помещенное на крышке серебряной шкатулки, ложно. В этом случае утверждение о том, что ровно одно из двух высказываний истинно, было бы неверным. Это означает, что либо оба высказывания истинны, либо оба ложны. Оба высказывания не могут быть истинными, так как по предположению второе высказывание ложно. Следовательно, оба высказывания ложны. Таким образом, высказывание, выгравированное на крышке золотой шкатулки, и в этом случае оказывается ложным.

Итак, независимо от того, истинно или ложно высказывание на крышке серебряной шкатулки, высказывание, выгравированное на крышке золотой шкатулки, должно быть ложным. Следовательно, портрет Порции должен находиться в золотой шкатулке.

Придя к такому выводу, кандидат в женихи открывает золотую шкатулку. К его неописуемому ужасу шкатулка была пуста. Порция открывает серебряную шкатулку — портрет лежит в ней. В чем ошибка претендента?

Приведем объяснение Р. Смаллиана. Претенденту на руку Порции следовало бы понять, что без информации об истинности или ложности любого высказывания или об отношении принимаемых высказываниями значений истинности высказывания не позволяют прийти к какому-либо выводу и портрет может находиться где угодно.

Что мешает вам взять любое число шкатулок, положить в одну из них какой-нибудь предмет и сделать на крышках любые надписи, какие только вам заблагорассудится? Эти надписи не будут нести в себе никакой информации о предмете, спрятанном в одной из шкатулок.

Ошибка претендента заключается также в том, что каждое из высказываний, выгравированных на крышках шкатулок, он считал либо истинным, либо ложным. На крышке золотой шкатулки было выгравировано: «Портрет не в этой шкатулке». Это высказывание заведомо либо истинно, либо ложно, так как портрет либо находится в золотой шкатулке, либо его там нет. В действительности, оно оказалось истинным, так как Порция положила портрет в серебряную шкатулку.

Теперь предположим, что нам известно, что Порция положила портрет в серебряную шкатулку. Что можно сказать о высказывании, выгравированном на крышке этой шкатулки? Истинно оно или ложно? Оказывается, оно не может быть ни истинным, ни ложным, так как в любом случае мы приходим к противоречию (проведите рассуждение самостоятельно). На этом Р. Смаллиан заканчивает обсуждение своей задачи.

Об отношении математической логики к реальному миру говорит следующая цитата из книги ***Ю. И. Манина***[1] [2]: «*Предметом логики не является внешний мир,*

[1]Юрий Иванович Манин (родился в 1937 году) — российский математик, один из основоположников некоммутативной алгебраической геометрии и квантовой информатики.

но лишь системы его осмыслевания. Логика одной из таких систем — математики — в силу своей нормализованности представляет подобие жесткого трафарета, который можно накладывать на любую другую систему. Соответствие или расхождение этого трафарета с системой, однако, не служит критерием ее пригодности либо мерилом ценности. Физик не обязан быть ни последовательным, ни непротиворечивым — он должен эффективно описывать природу на определенных уровнях. Тем менее логичны естественные языки и непосредственная работа сознания. Вообще логичность как условие эффективности появляется лишь в узкоспециализированных сферах человеческой деятельности».

Иногда создается впечатление, что новые математические теоремы получаются путем сочетания других, уже известных. Заслуга их авторов в том, что они обладали достаточными способностями, чтобы правильно объединить нужные теоремы и применить правила логики. Однако сама по себе логика ничего не производит: нужно что-то, что заставило бы ее работать, и это «что-то» — результат интуиции, аналогий, проб и ошибок. Именно в том, чтобы заставить логику работать, и заключается математическое творчество.

Вспомним классификацию Г. Штейнгауза из параграфа 1.2. Какой математикой занимается математическая логика? Математикой «α» и «γ» — когда открываются и доказываются новые утверждения или когда математику применяют в других науках. Если мы решаем типичные задачи, используя определенный шаблон, или вычисляем по заданным правилам, т. е. осуществляем математику «β» и «δ», то математическая логика не нужна. Достаточно просто быть последовательным.

Если кратко сказать о соотношении математики и логики к реальному миру, то справедлив следующий тезис: *Математика и логика изучают все воображаемые миры, а естественные науки — только реальный мир*.

Список литературы по модулю

[1] Смаллиан Р. Как же называется эта книга? / Р. Смаллиан. — М. : Мир, 1981. — 238 с.

[2] Манин Ю. И. Доказуемое и недоказуемое / Ю. И. Манин. — М. : Мир ; Советское радио, 1979. — 168 с.