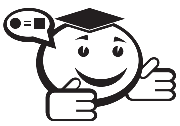
Модуль 1.3. Софизмы и парадоксы

История логики и математики полна неожиданных и интересных софизмов и парадоксов. И зачастую именно их разрешение служило толчком к новым открытиям, из которых, в свою очередь, вырастали новые софизмы и парадоксы. Необходимо различать между собой парадоксы и софизмы.



Парадокс *— рассуждение либо высказывание, в котором пользуясь средствами, не выходящими (по видимости) за рамки логики, приходят к заведомо неприемлемому результату, обычно к противоречию.*

Софизм *(от греч. sophista — уловка, выдумка, головоломка) — мнимое доказательство, в котором обоснованность заключения, кажущаяся, порождается чисто субъективным впечатлением, вызванным недостаточностью логического или семантического анализа.*

Задача от Блондинки — пример логической ошибки в рассуждениях.

Классическая блондинка из анекдотов — красивая, но интеллектуально элементарная девушка, интересующаяся поддержанием своей привлекательности, покупкой нарядов, любовниками и деньгами, источниками которых являются богатые, но непривлекательные мужчины. Юмористический образ блондинки присущ многим европейским культурам.

Условие. Я взяла у друга в долг 100 рублей, которые благополучно потеряла. Тогда я пошла к подруге и взяла в долг еще 50 рублей. Купила две шоколадки по 10 рублей. Оставшиеся 30 рублей вернула другу. Осталась должна 70 рублей другу и 50 рублей подруге, всего 120 рублей. Плюс купленные шоколадки. Итого 140 рублей.

Вопрос. Куда подевались 10 рублей?

В отличие от логической ошибки, возникающей непроизвольно и являющейся следствием невысокой логической культуры, софизм является преднамеренным нарушением логических правил. Обычно он тщательно маскируется под истинное суждение.

Софистами называли группу древнегреческих философов IV–V века до н. э., достигших большого искусства в логике. В период падения нравов древнегреческого общества появляются так называемые учителя красноречия, которые целью своей деятельности считали и называли приобретение и распространение мудрости, вследствие чего они именовали себя софистами. Их задачей обычно было научить убедительно защитить любую точку зрения, какая только могла понадобиться ученику, при этом вполне допускались логические передержки, применение противоречивых норм, бытовавших у разных народов, неправомерные переходы от общего правила к частному случаю, который этим правилом, по существу, не предусмотрен.

Существует множество софизмов, созданных еще в древности и сохранившихся до сегодняшнего дня. Заключение большей части из них носит курьезный характер. Например, софизм «вор» выглядит так: «Вор не желает приобрести ничего дурного;

приобретение хорошего есть дело хорошее; следовательно, вор желает хорошего». Странно звучит и следующее утверждение: «Лекарство, принимаемое больным, есть добро; чем больше делать добра, тем лучше; значит, лекарство нужно принимать в больших дозах». Существуют и другие известные софизмы, например: «Сидящий встал; кто встал, тот стоит; следовательно, сидящий стоит» или софизм «рогатый»: «То, что ты не потерял, ты имеешь; ты не потерял рога, следовательно, ты их имеешь».

Более интересен софизм «Эватл и Протагор».

Эватл брал уроки софистики у софиста Протагора под тем условием, что гонорар он уплатит только в том случае, если выиграет первый процесс. Ученик после обучения не взял на себя ведения какого-либо процесса и потому считал себя вправе не платить гонорара. Учитель грозил подать жалобу в суд, говоря ему следующее: «Судьи или присудят тебя к уплате гонорара или не присудят. В обоих случаях ты должен будешь уплатить. В первом случае в силу приговора судьи, во втором случае в силу нашего договора». На это Эватл отвечал: «Ни в том, ни в другом случае я не заплачу. Если меня присудят к уплате, то я, проиграв первый процесс, не заплачу в силу нашего договора, если же меня не присудят к уплате гонорара, то я не заплачу в силу приговора суда».

А вот современный софизм, обосновывающий, что с возрастом «годы жизни» не только кажутся, но и на самом деле короче: «Каждый год вашей жизни — это её $1/n$ часть, где n — число прожитых вами лет. Но $n+1 > n$. Следовательно, $1/(n+1) < 1/n$».

Еще один софизм, связанный с физикой: «Вечный двигатель первого рода невозможен, поскольку его запрещает первое начало термодинамики; вечный двигатель второго и третьего рода запрещают соответственно второе и третье начала термодинамики; поскольку четвертого начала термодинамики нет, то вечный двигатель четвертого рода возможен».

Рассмотрим математические софизмы. Объяснять, в чем состоит ошибочность рассуждения в каждом софизме, мы не будем, чтобы не лишать читателя удовольствия самостоятельно найти ее.

1. *Тождественные преобразования, использующие операции со степенями и мнимой единицей*:

$$1 = 1^{1/2} = \left(i^4\right)^{1/2} = i^2 = -1;$$
$$1 = 1^{1/2} = \big((-1)\cdot(-1)\big)^{1/2} = (-1)^{1/2}\cdot(-1)^{1/2} = i^2 = -1.$$

Каждое из этих двух преобразований «доказывает», что $1 = -1$.

2. *Квадратное уравнение имеет три корня.*

Как известно, квадратное уравнение может иметь либо два корня, либо один, либо вообще не иметь корней. Но так ли это на самом деле? Посмотрите на вот это уравнение:

$$\frac{(-a+x)(-b+x)}{(-a+c)(-b+c)} + \frac{(-a+x)(-c+x)}{(-a+b)(b-c)} + \frac{(-b+x)(-c+x)}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

Здесь a, b, c — любые различные числа. Поскольку в числителе каждой дроби перемножаются две скобки, содержащие x, то это уравнение, несомненно, является квадратным. Однако подставим в него $x = a$: первое и второе слагаемые содержат множитель $(x - a)$, поэтому обратятся в 0, а третье слагаемое станет равным 1. Таким образом, при $x = a$ получаем равенство $1 = 1$, т. е. $x = a$ — корень этого уравнения. Совершенно аналогично проверяется, что $x = b$ и $x = c$ тоже являются корнями. Значит, это уравнение имеет три различных корня.

3. *Числа Фибоначчи.*

Последовательность чисел Фибоначчи $f(n)$ определяется по правилам: $f(1) = f(2) = 1$ и $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ при $n > 2$. Первые 10 чисел суть 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Возьмем квадрат со стороной $f(7) = 13$. Разрежем его на 4 части и составим из них прямоугольник (рис. 1). Стороны прямоугольника $f(8) = 21$ и $f(6) = 8$. Площадь квадрата равна 169, а площадь прямоугольника равна 168. Площади равносоставленных четырехугольников оказались неравными.

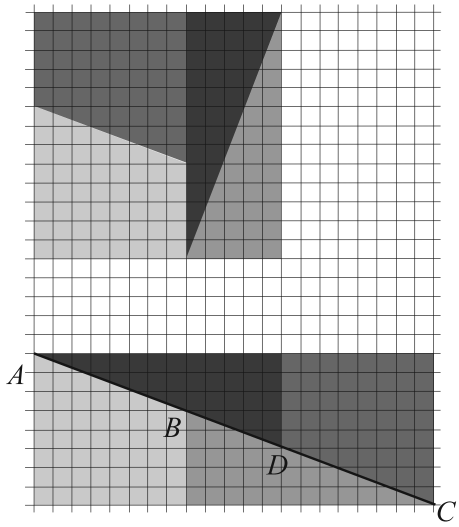


Рис. 1 – $f(7)^2$ и $f(6) \times f(8)$

Теперь возьмем квадрат со стороной $f(8) = 21$. Разрежем его на 4 части и составим из них прямоугольник (рис. 2). Стороны прямоугольника $f(7) = 13$ и $f(9) = 34$. Площадь квадрата равна 441, а площадь прямоугольника равна 442. Площади равносоставленных четырехугольников снова оказались неравными.

Аналогичное построение можно провести для любых трех последовательных чисел Фибоначчи.

4. *Карта России.*

На карте России масштаба 1:15 000 000 все размеры уменьшены в 15 миллионов раз. Если население в 150 миллионов уменьшить во столько же раз — останется 10 человек. Казалось бы, им должно хватить места. Но на карте и одному тесно (рис. 3).

В параграфе 7.2 главы 7 мы познакомимся еще с одним софизмом.

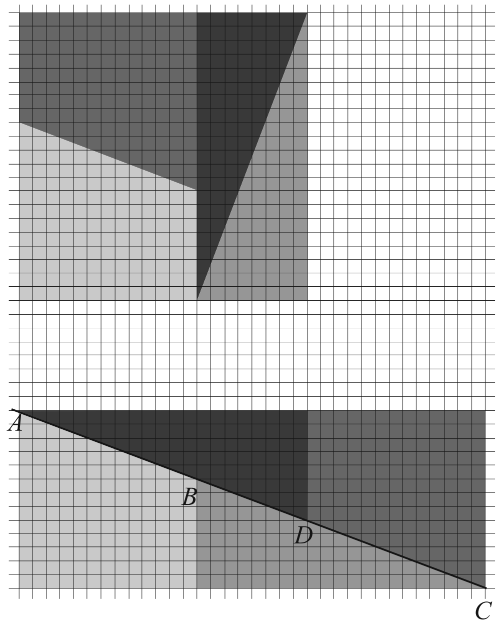


Рис. 2 – $f(8)^2$ и $f(7) \times f(9)$

Рис. 3 – Карта России

Перейдем к парадоксам. Парадоксы сопровождают развитие логики с древних времен. Их появление всегда с беспокойством воспринималось мыслителями. И если раньше их рассматривали как некий курьез мысли, которого можно избежать при должной осторожности в рассуждениях, то в современной логике отношение к парадоксам гораздо серьезнее. С ними действительно связаны реальные проблемы. Анализ парадоксов часто приводит к пересмотру основ логических теорий, к уточнению понятий и допущений и даже к появлению новых направлений в логике. Далеко не все парадоксы оказываются на деле легко разрешимыми.

1. **Парадокс «Лжец»**. Его открытие приписывают древнегреческому философу Евбулиду (IV в. до н. э.). Вся проблема заключается в интерпретации простой

фразы: «Я лгу». Является это высказывание истинным или ложным? Из истинности этого утверждения следует его ложность, и наоборот.

Другую форму парадокса лжеца предложил французский логик Иоанн Буридан (XIII век).

Обозначим через P высказывание, содержащееся в рамке:

$\boxed{\textbf{\textit{P ложно}}}$

Является это высказывание истинным или ложным?

Логики продолжают обсуждать парадокс лжеца и по сей день. Предлагалось немало вариантов решения, однако ни одно из решений не является общепризнанным.

2. **Апория Зенона: Ахиллес и черепаха**. Древнегреческий философ Зенон[1] доказывал, что Ахиллес, один из самых сильных и храбрых героев, осаждавших древнюю Трою, никогда не догонит черепаху, которая, как вы, конечно, знаете, отличается крайне медленной скоростью передвижения.

Вот примерная схема его рассуждений. Предположим, что Ахиллес и черепаха начинают свое движение одновременно и Ахиллес стремится догнать черепаху. Примем для определенности, что Ахиллес движется в 10 раз быстрее черепахи и что их отделяют друг от друга 100 м. Когда Ахиллес пробежит расстояние в 100 м, отделяющее его от того места, откуда начала свое движение черепаха, то в этом месте Ахиллес ее уже не застанет, так как она пройдет вперед расстояние в 10 м. Когда Ахиллес минует и эти 10 м, то и там черепахи уже не будет, поскольку она успеет перейти на 1 м в новое место. Достигнув и этого нового места, Ахиллес опять не найдет там черепахи, потому что она успеет пройти расстояние, равное 10 см, и снова окажется несколько впереди его. Это рассуждение можно продолжать до бесконечности, и придется признать, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медленно ползущую черепаху.

Апории Зенона, из которых до нас дошло только девять, имеют глубокий смысл и направлены на вскрытие понятия бесконечности, и до сих пор привлекают внимание математиков и философов, которые продолжают давать им самые различные объяснения. Рассматриваемая здесь апория Зенона даже на сегодняшний день далека от своего окончательного разрешения.

3. **Парадокс крокодила**. У одной египтянки крокодил похитил ребенка. Египтянка просила вернуть ребенка, и крокодил обещал ей это, если она правильно укажет, как поступит крокодил.

Мать ребенка сказала: «Ты не возвратишь мне моего ребенка».

На это крокодил ответил: «Если ты, действительно, права, то ты, как сама говоришь, не получишь назад ребенка; если же твое высказывание неверно, то, согласно нашему уговору, ты не получишь ребенка. В любом случае ребенок должен остаться у меня».

«Наоборот — возразила женщина, — если мое высказывание верно, то я получу ребенка назад в силу нашего условия; если же я ошиблась, то это означает, что ты сам вернешь мне ребенка. В каждом из случаев я получу ребенка назад».

[1]Зенон (около 490–430 гг. до н. э.) — представитель элейской философской школы, которого Аристотель считал основателем диалектики как искусства познания истины с помощью спора или истолкования противоположных мнений. «Апория» в переводе с греческого означает «трудность».

Кто прав: мать или крокодил? К чему обязывает крокодила данное им обещание? К тому, чтобы отдать ребенка или, напротив, чтобы не отдать его? И к тому и к другому одновременно. Это обещание внутренне противоречиво, и, таким образом, оно невыполнимо в силу законов логики.

4. **Парадокс Берри**. Впервые парадокс опубликован Бертраном Расселлом, приписав его авторство Дж. Дж. Берри (1867–1928 гг.), библиотекарю библиотеки в Оксфорде.

Рассмотрим выражение:

«*Наименьшее натуральное число, которое нельзя описать менее чем одиннадцатью словами*».

Поскольку слов конечное число, существует конечное множество фраз из менее чем одиннадцати слов и, следовательно, конечное подмножество натуральных чисел, определяемых фразой из одиннадцати слов. Однако множество натуральных чисел бесконечно, следовательно, существуют числа, которые нельзя определить фразой из менее чем одиннадцати слов. Среди них, очевидно, существует наименьшее натуральное число (наименьшее число можно выбрать из любого подмножества натуральных чисел), не описываемое менее чем одиннадцатью словами. Но именно это число определяется приведённой выше фразой и в ней менее одиннадцати слов, а значит, не может являться искомым наименьшим числом и не может описываться данной фразой. Возникает парадокс: должно существовать число, описываемое данной фразой, но поскольку выражение само себе противоречит, не может существовать числа, им описываемого.

5. **Парадокс Греллинга** назван в честь открывшего его немецкого математика Курта Греллинга.

Разделим все прилагательные на два множества: *самодескриптивные*, обладающие тем свойством, которое они выражают, и *несамодескриптивные*. Такие прилагательные, как «многосложное», «русское» и «трудновыговариваемое» принадлежат к числу самодескриптивных. А такие как «немецкое», «однокоренное» и «невидимое» — к числу несамодескриптивных. К какому из двух множеств принадлежит прилагательное «несамодескриптивное»? Если оно несамодескриптивное, оно обладает обозначаемым им свойством и должно быть самодескриптивным. Если же оно самодескриптивное, оно не имеет обозначаемого им свойства и должно быть несамодескриптивным.

6. **Парадокс брадобрея**. Единственному деревенскому брадобрею приказали: «Брить всякого, кто сам не бреется, и не брить того, кто сам бреется». Кто побреет брадобрея?

Математическая форма этого парадокса называется **парадоксом Бертрана Рассела** и рассматривается в теории множеств — глава 3.

7. **Парадокс неожиданной казни**. Впервые сформулирован и опубликован в 1948 года философом Д. Дж. О′Коннором.

Однажды в воскресенье начальник тюрьмы вызвал преступника, приговорённого к казни, и сообщил ему:

«Вас казнят на следующей неделе в полдень» и

«День казни станет для вас сюрпризом, вы узнаете о нём, только когда палач в полдень войдёт к вам в камеру».

Начальник тюрьмы был честнейшим человеком и никогда не врал. Заключённый подумал над его словами и улыбнулся: «В воскресенье меня казнить не могут! Ведь тогда уже в субботу вечером я буду знать об этом. А, по словам начальника, я не буду знать день своей казни. Следовательно, последний возможный день моей казни — суббота. Но если меня не казнят в пятницу, то я буду заранее знать, что меня казнят в субботу, значит, и её можно исключить». Последовательно исключив пятницу, четверг, среду, вторник и понедельник, преступник пришёл к выводу, что начальник не сможет его казнить, выполнив все свои слова.

На следующей неделе палач постучал в его дверь в полдень в среду — это было для него полной неожиданностью. Всё, что начальник тюрьмы сказал, осуществилось. Где недостаток в рассуждении заключённого?

В дальнейшем мы познакомимся еще с несколькими парадоксами: парадокс Карри (глава 4), принцип пьяницы (глава 5), парадокс Банаха—Тарского (глава 6), парадоксы Гемпеля и изобретателя из главы 7.

Парадоксы лжеца, крокодила, Берри, Греллинга и брадобрея относятся к парадоксам автореференции. ***Автореференция (самоссылочность)*** — явление, которое возникает в системах высказываний в тех случаях, когда некое понятие ссылается само на себя. Иначе говоря, если какое-либо выражение является одновременно самой функцией и аргументом этой функции. Автореференция часто сопряжена с парадоксом.

Ввиду того, что парадоксы обнажают скрытые концептуальные противоречия и переводят их в прямые и открытые, они, согласно законам творческого мышления, помогают при развитии новых идей и концепций.