Модуль 1.2. О математике

Математик это сделает лучше. Универсальный принцип.

Гуго Штейнгауза[1]

Математик так же, как художник или поэт, создаёт узоры. И если его узоры более устойчивы, то лишь потому, что они составлены из идей... Узоры математика так же, как узоры художника или поэта, должны быть прекрасны; идеи так же, как цвета или слова, должны гармонически соответствовать друг другу. Красота есть первое требование: в мире нет места для некрасивой математики.

Годфри Харди[2]

Возникновение логики как науки о дедуктивных рассуждениях связано с именем Аристотеля (384–322 гг. до н. э.)[3]. Но развитие логики по-настоящему пошло лишь в XX веке, когда математика, как писал Н. Н. Непейвода, «доросла до того, чтобы применять свои методы для анализа своей собственной структуры, и таким образом, первой из наук перешла со стадии экстенсивного роста на стадию рефлексии»[4].

Появилась новая наука — ***математическая логика*** — унаследовавшая задачи формальной логики, но использовавшая для их решения математический аппарат.

Рассмотрим науку математику, ее особенности, ее проблемы, с точки зрения логики и частично психологии.

Первое, что мы должны выяснить — это зачем изучать математику? Математику изучают на протяжении всего многолетнего школьного образования. Какая цель? Ведь не секрет, что многие математические школьные знания никогда не используются большинством взрослых.

На наш взгляд здесь надо полностью согласиться с мнением В. А. Успенского[5]. Перескажем извлечения из его работы [1].

Математика составляет неотъемлемую часть человеческой культуры, но образование состоит не только в расширении круга знаний. В неменьшей степени оно предполагает и расширение навыков мышления. Главная цель обучения математике — психологическая.

Эта цель состоит не столько в сообщении знаний и даже не в столько обучении методу, сколько в *расширении* психологии обучающегося, в привитии ему строгой дисциплины мышления (слово «дисциплина» обозначает здесь приверженность к порядку и способность следовать этому порядку).

[1] Гуго Дионисий Штейнгауз (1887–1972 гг.) — польский математик. Смысл его принципа, конечно, не в том, что медиков и юристов надо вербовать только среди математиков, но с назиданием, что представитель каждой специальности, владеющий стилем и методом мышления, почерпнутым при творческом изучении математики, будет и в своей области работать лучше.

[2] Годфри Харолд Харди (1877–1947 гг.) — знаменитый английский математик.

[3] См. следующую главу, посвященную истории логики.

[4] Рефлексия — самоанализ, в науке — применение методов данной науки к ней самой.

[5] Владимир Андреевич Успенский (род. 1930 г., Москва) — российский математик.

Есть три важнейших умения, выработке которых должны способствовать математические занятия. Называем их в порядке возрастания важности:

1) во-первых, умение отличать истинное от ложного (или доказанное от недоказанного);
2) во-вторых, умение отличать имеющее смысл от бессмыслицы;
3) в-третьих, умение отличать понятное от непонятного.

Даже в научной печати встречаются бессмысленные тексты. Коллектив научно-популярной газеты «Троицкий вариант» во главе с М. С. Гельфандом (доктором биологических наук) провел общественную акцию. Была написана статья — перевод на русский язык англоязычной статьи, сгенерированной компьютерной программой. Статья содержала правдоподобно выглядящий, но слабосвязанный и бессмысленный текст. Под названием «*Корчеватель: Алгоритм типичной унификации точек доступа и избыточности*» и от имени несуществующего аспиранта Михаила Жукова из несуществующего Института информационных проблем РАН эта статья была отправлена для публикации в журнал «Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов» (г. Курск). Данный журнал входил в список научных журналов ВАК Минобрнауки России. После оплаты услуги публикации в размере 4500 рублей статья была принята к печати, получив положительный отзыв рецензента о том, что «статья принята с небольшими замечаниями» [2].

Чтобы квалифицировать высказывание как ложное, бессмысленное или непонятное, надо сделать некоторое усилие — иногда это требует интеллектуальных усилий, а иногда ваша точка зрения противоречит мнению авторитетного лица. Не все и не всегда готовы на такое усилие.

Способность к такому усилию, о котором только что говорилось, тренируется (во всяком случае, должна тренироваться) на уроках математики и при общении с математиками. Дело в том, что математика — наука по природе своей демократическая.

В начальных математических знаниях нуждается каждый человек. Но практическая польза математики весьма нетривиальная.

Математика обладает свойством опережать экспериментальные знания и позволяет нам силой мысли проникать в те уголки Вселенной, куда мы физически проникнуть не можем. Классический пример такого рода — это знаменитое открытие Нептуна на кончике пера. Вскоре после открытия Урана в конце XVIII века в движении этой планеты стали выявляться непонятные аномалии — она то «отставала» от расчётного положения, то опережала его. Было высказано предположение о том, что имеющиеся нарушения в траектории Урана можно объяснить, если предположить, что есть еще одна планета, доселе неизвестная. Из видимых с помощью телескопа нарушений движений Урана, с помощью сложных математических расчетов длиной в несколько лет удалось узнать, где могло бы двигаться новое небесное тело. Вычисления массы и орбиты новой планеты проводил французский математик Урбен Леверье. В 1846 году астрономы обнаружили новую планету в указанной Леверье точке небесной сферы.

Математика помогает узнать недостающие куски реальности. Это ярко выразилось в истории с электричеством и радиосвязью. К моменту открытия никто не знал слова «радиосвязь». К середине XIX века имелись некоторые физические законы, полученные экспериментально. Был математически выраженный закон Кулона, который говорил о том, как электрические заряды притягиваются, был закон Ампера — закон о магнитных и электрических полях — о том, какие магнитные поля создаются токами, потом появился закон Фарадея. Это были математические утверждения, которые существовали изолировано и более или менее сами по себе. Джеймс Максвелл[1] задался целью найти, нет ли единого математического формализма, в котором все эти законы записывались бы однотипно и в некотором смысле равномерно.

Максвелл сформулировал систему уравнений в дифференциальной форме, описывающих электромагнитное поле и его связь с электрическими зарядами и токами в вакууме и сплошных средах. Эти уравнения сыграли ключевую роль в развитии представлений теоретической физики и оказали сильное, зачастую решающее влияние не только на все области физики, непосредственно связанные с электромагнетизмом, но и на многие возникшие впоследствии фундаментальные теории, предмет которых не сводился к электромагнетизму (одним из ярчайших примеров здесь может служить специальная теория относительности).

В современном взгляде на Вселенную можно выделить два ключевых момента:

1) гипотеза об объективном существовании мира вне человека предполагает, что полное описание физической реальности не зависит от субъективного мнения человека;

2) любой вариант объективного описания реальности представляет собой некую математическую структуру. Современная физическая картина мира является по сути дела математической.

Приведенные примеры могут создать впечатление, что математика в основном занимается решением задач, которые имеют прикладное значение.

Это не так. ***Станислав Лем***[2] весьма образно описывает, чем занимается математик. Приведем отрывок из его книги «Сумма технологий» [3]: «*Давайте представим себе портного-безумца, который шьет всевозможные одежды. Он ничего не знает ни о людях, ни о птицах, ни о растениях. Его не интересует мир, он не изучает его. Он шьет одежды. Не знает, для кого. Не думает об этом. Некоторые одежды имеют форму шара без всяких отверстий, в другие портной вшивает трубы, которые называет «рукавами» или «штанинами». Число их произвольно. Одежды состоят из разного количества частей.*

Портной заботится лишь об одном: он хочет быть последовательным. Одежды, которые он шьет, симметричны или асимметричны, они большого или малого размера, деформируемы или раз и навсегда фиксированы. Когда портной берется за шитье новой одежды, он принимает определенные предпосылки. Они не всегда одинаковы, но он поступает точно в соответствии с принятыми предпосылками и хочет, чтобы из них не возникало противоречие. Если он пришьет штанины, то потом уж их не отрезает, не распарывает того, что уже сшито, ведь это должны быть все же костюмы, а не кучи сшитых вслепую тряпок.

Готовую одежду портной относит на огромный склад. Если бы мы могли туда войти, то убедились бы, что одни костюмы подходят осьминогу, другие — дере-

[1]Джеймс Клерк Максвелл (1831–1879 гг.) — британский физик и математик.

[2]Станислав Лем (1921–2006 гг.) — польский писатель, философ, фантаст и футуролог.

вьям или бабочкам, некоторые — людям. Мы нашли бы там одежды для кентавра и единорога, а также для созданий, которых пока никто не придумал. Огромное большинство одежд не нашло бы никакого применения. Любой признает, что сизифов труд этого портного — чистое безумие.

Точно так же, как этот портной, действует математика. Она создает структуры, но неизвестно чьи. Математик строит модели, совершенные сами по себе (то есть совершенные по своей точности), но он не знает, модели ЧЕГО он создает. Это его не интересует. Он делает то, что делает, так как такая деятельность оказалась возможной. Конечно, математик употребляет, особенно при установлении первоначальных положений, слова, которые нам известны из обыденного языка. Он говорит, например, о шарах, или о прямых линиях, или о точках. Но под этими терминами он не подразумевает знакомых нам понятий. Оболочка его шара не имеет толщины, а точка — размеров. Построенное им пространство не является нашим пространством, так как оно может иметь произвольное число измерений…».

Опыт развития математики убеждает, что самые, казалось бы, оторванные от практики ее разделы рано или поздно находят важные применения. Приведем несколько примеров.

1. Теория чисел, одна из древнейших в математике, долгое время считалась чем-то вроде «игры в бисер»[1]. Оказалось, что без этой теории немыслима современная криптография, равно как и другие важные направления, объединенные названием «защита информации».
2. Специалисты по теоретической физике интересуются новейшими разработками алгебраической геометрии и даже такой абстрактной области, как теория категорий.
3. Теория категорий используется в функциональном программировании — язык Haskell (реализация монад) [5].

Г. Штейнгауз предложил следующую оригинальную классификацию «математик» [6, с. 49–50]. Одной из целей математики является открытие и доказательство новых утверждений. Математику, которая занимается именно этим, назовем логической математикой или математикой «α». Математику, которая занимается решением задач типа школьных, задач с ясной постановкой и очевидно существующим решением, назовем математикой «β». На основе того факта, что утверждения чистой математики можно применять и к другим наукам, возникла математика «γ», которую называют прикладной. При этом мы должны научиться выполнять ряд вычислений. Как проще и лучше осуществлять стандартные вычислительные операции — этому учит практическая математика, которую можно назвать математикой «δ».

Неполный, односторонний взгляд на сущность математики заключается в том, что огромное большинство людей никогда не имеют дела с математикой, иной нежели «δ». Большинство образованных людей не встречаются с математикой, отличной от «β» и «δ».

[1] Г. Харди, известный своими работами в теории чисел и математическом анализе, писал: «Я никогда не делал чего-нибудь «полезного». Ни одно мое открытие не принесло или могло бы принести, явно или не явно, к добру или к злу, малейшего изменения в благоустройстве мира» [4].

Поэтому зададим себе вопрос: какое значение в жизни имеет математика «α» и «γ»? Ответ на этот вопрос вы найдете в параграфе 1.4.

Математика — это не просто наука, а вдобавок система традиций, ценностей, восприятия и даже мировоззрения целого научного сообщества.

Особенности научной этики математика описывает ***Н. Н. Непейвода***: «*Математику неприлично заниматься тем, что не допускает точной формулировки, и самому формулировать утверждения, которые могут быть поняты двояко.*

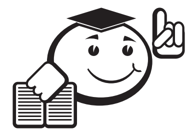
Ему неприлично выдавать правдоподобное утверждение за доказанное, он имеет право утверждать лишь то, для чего он имеет полное доказательство.

Ему нельзя утаивать открытое им доказательство, он обязан предоставить его на максимально широкое обсуждение, для проверки всеми заинтересованными лицами.

Если кто-то нашел ошибку в доказательстве, математик не имеет право настаивать на своем, а обязан поблагодарить за помощь и публично объявить о своей ошибке и пересмотреть доказательство или формулировку теоремы.

Если кто-то нашел опровергающий пример для доказанного им утверждения, автор доказательства даже не имеет права требовать, чтобы нашли еще ошибку и в его доказательстве; текст, объявленный доказательством, уже никого не интересует.

Эти достаточно точные и строгие критерии показывают, почему именно в среде математиков устойчивей всего сохраняется понятие научной этики и чести ученого».



Список литературы по модулю

[1] Успенский В. А. Апология математики / В. А. Успенский. — СПб. ; Амфора, 2009. — 554 с.

[2] Александр Емельяненков. С учёным видом. Как за 4,5 тысячи рублей в журнале опубликовали заведомую галиматью // Российская газета. — 2008. — N 4782. — URL : http://www.rg.ru/2008/10/29/journal-nauka.html (дата обращения 08.05.2015).

[3] Лем С. Сумма технологии / С. Лем. — М. : АСТ ; СПб. : TerraFantastica, 2002. — 668 с.

[4] Харди Г. Г. Апология математика / Г. Г. Харди. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 104 с.

[5] Зюзьков В. М. Ленивое функциональное программирование : учеб. пособие / В. М. Зюзьков. — 2-е изд., перераб. и доп. — 2007. — 294 с.

[6] Штейнгауз Г. Математика — посредник между духом и материей : пер. с польск. / Г. Штейнгауз. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 351 с.